

Esponenziali e logaritmi. Esercizi.

Mauro Saita.

e-mail maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria.

Febbraio 2014

Indice

1	Esercizi	2
1.1	Test n.1.	2
1.2	Test n.2.	4
1.3	Test n.3.	6
1.4	Test n.4.	7
1.5	Test n.5.	8
1.6	Test n.6.	9
1.7	Test n.7.	10
1.8	Test n.8.	11

⁰Nome file: 'explog-esercizi-2014.tex'

1 Esercizi

1.1 Test n.1.

Rispondere ai seguenti quesiti sul foglio protocollo.

Esercizio 1.1.

- a) *Tracciare il grafico della funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{>0}$, $f(x) = (\frac{1}{2})^x$*
- b) *Spiegare perchè l'equazione $(\frac{1}{2})^x = -\frac{1}{2}$ non ha soluzioni.*

Esercizio 1.2. *La funzione esponenziale (con base $a > 0$ e $a \neq 1$) trasforma somme in prodotti. Scrivere in termini precisi questa proprietà.*

Esercizio 1.3. *Risolvere nel campo \mathbb{R} dei numeri reali le seguenti equazioni*

- a) $2^{2x} - 9 \cdot 2^x + \log_2 2^8 = 0$
- b) $3^x - 3^{x-1} = 2^x$

Esercizio 1.4.

- a) *Scrivere la definizione di logaritmo in base a di un numero $x > 0$.*
- b) *Trovare i valori dei seguenti logaritmi: $\log_3 81$; $\log_2 \frac{1}{16}$; $\log_7 1$*
- c) *Scrivere il $\log_3 23$ in base 10.*
- d) *Per quali valori di x la funzione $y = \log x$ risulta positiva?*
- e) *Per quali x la funzione $y = \log x$ risulta maggiore di 1?*

Esercizio 1.5.

1. *Scrivere la definizione di funzione invertibile.*
2. *Quale relazione sussiste tra il grafico della funzione logaritmica in base a e quello della funzione esponenziale nella stessa base? Posto $a = \frac{1}{4}$, tracciare i grafici di $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ e $y = (\frac{1}{4})^x$.*

Esercizio 1.6. *La proprietà fondamentale dei logaritmi afferma che il logaritmo trasforma prodotti in somme.*

- a) *Scrivere tale proprietà in termini precisi.*

b) *Scrivere la dimostrazione di tale proprietà.*

Esercizio 1.7. *Determinare il dominio (= campo di esistenza) della seguente disequazione logaritmica*

$$\log(1 - x) - \log(x + 2) < \log(2x - 1)$$

1.2 Test n.2.

Rispondere ai seguenti quesiti sul foglio protocollo.

Esercizio 1.8.

- a) *Tracciare il grafico della funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{>0}$, $f(x) = 5^x$*
- b) *Spiegare perchè l'equazione $5^x = -\frac{1}{5}$ non ha soluzioni.*

Esercizio 1.9. *La funzione esponenziale (con base $a > 1$) è strettamente crescente. Scrivere in termini precisi questa proprietà.*

Esercizio 1.10. *Risolvere nel campo \mathbb{R} dei numeri reali le seguenti equazioni*

- a) $5^{2x} - 5^{x+1} + \log_3 3^6 = 0$
- b) $3^x - 3^{x-1} = 2^x$

Esercizio 1.11.

- a) *Scrivere la definizione di logaritmo in base a di un numero $x > 0$.*
- b) *Trovare i valori dei seguenti logaritmi: $\log_4 64$; $\log_3 \frac{1}{81}$; $\log_6 6$*
- c) *Scrivere il $\log_3 23$ in base 10.*
- d) *Per quali valori di x la funzione $y = \log x$ risulta negativa?*
- e) *Per quali x la funzione $y = \log x$ risulta maggiore di 10?*

Esercizio 1.12.

1. *Scrivere la definizione di funzione invertibile.*
2. *Quale relazione sussiste tra il grafico della funzione logaritmica in base a e quello della funzione esponenziale nella stessa base? Posto $a = 2$, tracciare i grafici di $y = \log_2 x$ e $y = 2^x$.*

Esercizio 1.13. *La proprietà fondamentale dei logaritmi afferma che il logaritmo trasforma prodotti in somme*

- a) *Scrivere tale proprietà in termini precisi.*

b) *Scrivere la dimostrazione di tale proprietà .*

Esercizio 1.14. *Determinare il dominio (= campo di esistenza) della seguente disequazione logaritmica*

$$\log(4 - x^2) - \log(x + 1) < \log(3x^2 + 1)$$

1.3 Test n.3.

Rispondere ai seguenti quesiti sul foglio protocollo.

Esercizio 1.15. *Tracciare il grafico delle seguenti funzioni precisando il dominio e le intersezioni con gli assi cartesiani:*

a) $(3, +\infty) \xrightarrow{g} \mathbb{R}, g(x) = \ln(2x - 6)$

b) $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{>0}, f(x) = 5e^x.$

Esercizio 1.16. *Risolvere nel campo \mathbb{R} dei numeri reali le seguenti equazioni esponenziali o logaritmiche*

a) $5^{x+1} - 5^{x-1} = 120$

b) $\ln(4x - 5) + \ln x = 2 \ln(x + 4)$

Esercizio 1.17. *Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali o logaritmiche*

a) $\log(x^2 - 5) - \log(x + 1) > 0$

b) $5^{2x} - 5^{x+1} + 6 \geq 0$

Esercizio 1.18. *Dire se la seguente proposizione è vera o falsa motivando la risposta.*

“Siano A e B due numeri reali. Se $A < B$ allora $e^A < e^B$.”

Esercizio 1.19. *Dire se la seguente proposizione è vera o falsa motivando la risposta.*

“Il numero $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{1000}$ è maggiore di 2^{1001} ”

1.4 Test n.4.

Scrivere le soluzioni sul quaderno, in modo conciso.

Esercizio 1.20. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

a) $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, f(x) = 3^x.$

b) $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, f(x) = 3^{x-2}.$

c) $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, f(x) = 2 \cdot 3^x.$

Esercizio 1.21. Risolvere nel campo dei numeri reali le seguenti equazioni e disequazioni esponenziali

1. $(5^{1+x})^{1-x} = \frac{1}{125}$

2. $4^{x-1} = \frac{1}{2^{x-x^2}}$

3. $\frac{3^{x^2+5}}{272x} < \frac{1}{3^{x+1}}$

Esercizio 1.22. All'inizio dell'anno una persona investe 3.500. La banca gli assicura un interesse annuo del 3,5%. Quale sarà il capitale di cui può disporre la persona dopo 10 anni se ogni anno decide di reinvestire anche gli interessi?

Esercizio 1.23. In una coltura batterica sono presenti inizialmente 10^9 batteri. Il loro numero raddoppia ogni 30 minuti.

1. Quanti batteri ci saranno nella coltura dopo 24 ore?
2. Dopo quanto tempo il numero di batteri nella coltura sarà pari al 25% della quantità finale?

Esercizio 1.24. Si dice che l'inventore del gioco degli scacchi chiese come ricompensa per la sua geniale scoperta chicchi di grano: uno per il primo quadrato della scacchiera, due per il secondo, quattro per il terzo, otto per il quarto e così via fino al sessantaquattresimo (ed ultimo) quadrato della scacchiera. Sapendo che 1.000 chicchi pesano circa 37,5 g calcolare

1. il peso, espresso in chilogrammi, della quantità di grano che si trova sul sessantaquattresimo quadrato della scacchiera. kg);
2. il peso, espresso in chilogrammi, della quantità totale di grano pretesa dall'inventore.

1.5 Test n.5.

Rispondere ai seguenti quesiti sul foglio protocollo.

Esercizio 1.25. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni precisando il dominio e le intersezioni con gli assi cartesiani:

1. $(3, +\infty) \xrightarrow{g} \mathbb{R}, g(x) = \ln(x - 1)$

2. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_{>0}, f(x) = 5e^x.$

Esercizio 1.26. Risolvere le seguenti equazioni esponenziali o logaritmiche

1. $5^{x+1} - 5^{x-1} = 120$

2. $\ln(4x - 5) + \ln x = 2 \ln(x + 4)$

Esercizio 1.27. Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali o logaritmiche

1. $\log(x^2 - 5) - \log(x + 1) > 0$

2. $5^{2x} - 5^{x+1} + 6 \geq 0$

3. $\ln(4x - 5) + \ln x = 2 \ln(x + 4)$

Esercizio 1.28. Qual è il maggiore tra i numeri 5^{1000} e 10^{500} ?

Esercizio 1.29. Trovare il numero di cifre del numero 7^{60} .

1.6 Test n.6.

Esercizio 1.30. Risolvere le seguenti equazioni esponenziali o logaritmiche

1. $2^x + 4 = 6 \cdot 2^{x-2}$
2. $\log(x - 4) + \log(x - 6) = \log(x + 6)$

Esercizio 1.31. Determinare, se esistono, le soluzioni delle seguenti disequazioni esponenziali o logaritmiche nel campo \mathbb{R} dei numeri reali

1. $\log_{\frac{1}{2}}(x + 2) - \log_{\frac{1}{2}}(x - 3) \leq 1$
2. $3^{x+3} + 9^{x+1} > 10$

Esercizio 1.32. Quante sono le cifre del numero 8^{70} ?

Esercizio 1.33. Risolvere, nel campo dei numeri reali, le seguenti equazioni esponenziali.

1. $81 \cdot 9^x = 9^{\frac{15}{x}}$
2. $4^{x+2} - 5 \cdot 2^{x+1} + 1 = 0$
3. $\frac{3^{2x} + 2 \cdot 3^x + 1}{3^{x+2} - 3^x} = \frac{2}{3}$

Esercizio 1.34. Risolvere, nel campo dei numeri reali, le seguenti disequazioni esponenziali.

1. $8^{x+2} > 32^{4x+1}$
2. $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 > 0$
3. $\frac{2^x}{2^x + 1} + \frac{2^x}{2^x + 4} \leq 1$

Esercizio 1.35. Si decide di investire euro 10.000 con la logica dell'interesse composto. A quanto ammonta il capitale dopo 12 anni?

1.7 Test n.7.

Vero o Falso? Motivare per iscritto le risposte sul retro del foglio.

1. V F L'insieme \mathbb{Z} dei numeri interi è un gruppo rispetto al prodotto.
2. V F La funzione $\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\log \frac{1}{2}} \mathbb{R}$ è strettamente decrescente.
3. V F Per ogni $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ si ha: $\log x - \log y = \log \left(\frac{x}{y} \right)$.
4. V F Per ogni $x \in \mathbb{R}_{>0}$ si ha: $x = a^{\log_a x}$, dove a è un numero reale positivo.
5. V F Esiste un'unica funzione strettamente crescente $(\mathbb{R}_{>0}, +) \xrightarrow{f} (\mathbb{R}, \cdot)$ per cui $f(1) = 5$ con la seguente proprietà: $f(x + y) = f(x)f(y)$, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.
6. V F $\log_{10}(10) = 1$.
7. V F Per ogni $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ si ha: $\log x \cdot \log y = \log(x + y)$.
8. V F Si considerino le funzioni $\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\ln} \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \xrightarrow{\exp_e} \mathbb{R}_{>0}$. Allora $\exp_e \circ \ln = 1_{\mathbb{R}}$.
9. V F Il numero $\log_{10} 3$ è irrazionale.

1.8 Test n.8.

Scrivere le soluzioni sul quaderno, in modo conciso.

Esercizio 1.36. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

1. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2}$

2. $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}_{>0}, g(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

Esercizio 1.37. Risolvere le seguenti equazioni

1. $4^x + 72^x + 10 = 0$

2. $7^x + 2^{3x-3} = 2^{3x} - 7^{x-1}$

3. $\log(x^2 - 5x + 4) - \log(x - 2) = 1$

Esercizio 1.38. Risolvere le seguenti disequazioni

1. $\log(2x^2 - 3x + 10) < 2$

2. $3e^{2x} - 5e^x - 2 > 0$

3. $\ln(3 - x) - \ln(2x - 3) > 0$