Numeri complessi. Esercizi.

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria. Marzo 2014.

Indice

1 Numeri complessi **2**

1.1 Test di autovalutazione. 2

1.2 Test di autovalutazione. 3

1.3 Test di autovalutazione. Vero o Falso? 4

1.4 Test di autovalutazione. 5

1.5 Circuiti elettrici in regime sinusoidale 6

1.6 Test di autovalutazione 7

1.7 Soluzioni 8

[0] Nome file .tex: 'esercizi-complessi-2014.tex'

1 Numeri complessi

1.1 Test di autovalutazione.

Test n.1

Rispondere a ciascun quesito per iscritto su questo foglio.

1. Sia $z = 2 + 2i$ e $z' = 5(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$. Scrivere i numeri complessi $z + z'$ e zz' in forma algebrica.

2. Si consideri il numero complesso $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Scrivere z^{-1} (inverso di z) in forma algebrica.

3. Sia $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$. Verificare che $|z| = 1$ e poi scrivere il numero complesso z^7 in forma algebrica.

4. Si considerino i numeri complessi $z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ e $w = 5(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$. Scrivere in forma trigonometrica il numero complesso zw.

5. Risolvere nel campo complesso la seguente equazione $x^2 + 2x + 5 = 0$

6. Scrivere il numero complesso $z = \dfrac{4+2i}{1-3i}$ in forma algebrica.

7. Sia $z = 1 + 2i$. Scrivere il numero complesso $\dfrac{z\overline{z}}{(z-i)^2}$ in forma algebrica.

8. Scrivere in forma trigonometrica l'inverso del numero complesso

$$z = 2(\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10})$$

9. Sia $z = 3 - 3i$. Scrivere in forma trigonometrica $\overline{z}$.

10. Si consideri il seguente insieme di numeri complessi

$$E = \{z \in \mathbb{C} \mid \; 1 \le Re(z) \le 2\}$$

Descrivere nel piano di Gauss l'insieme E.

1.2 Test di autovalutazione.

Test n.2

Rispondere a ciascun quesito per iscritto su questo foglio.

1. Scrivere la definizione di unità immaginaria i e disegnare nel piano complesso i^{345}.

2. Se $z = 2 - \sqrt{3}i$ scrivere $\overline{z}$ (complesso coniugato di z). Disegnare i due numeri nel piano di Gauss.

3. Se $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = -1 + i$ determinare $z_1 + z_2$ e $z_1 \cdot z_2$

4. Scrivere il numero complesso $z = x + iy$ in forma trigonometrica. Dare una spiegazione dettagliata.

5. Scrivere $z = 1 + \sqrt{3}i$ in forma trigonometrica.

6. Il numero complesso $z = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ è un numero complesso unitario? Spiegare.

7. Moltiplicando tra loro due numeri complessi unitari cosa si ottiene? Spiegare

8. Sia $z = 2 + 3i$. Determinare il numero complesso zi in forma algebrica. Interpretare geometricamente il risultato.

9. Sia $z = 2 + 5i$. Trovare $z + \overline{z}$. Di quale numero si tratta? Se $z = x + iy$ determinare $z + \overline{z}$

10. Sia $z = 2 + 5i$. Trovare $z \cdot \overline{z}$. Di quale numero si tratta? Se $z = x + iy$ determinare $z \cdot \overline{z}$

1.3 Test di autovalutazione. Vero o Falso?

Test n.3

Motivare per iscritto le risposte su questo foglio.

1. V | F Se $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ allora $z^{-1} = \frac{2}{\sqrt{3}} + 2i$

2. V | F Se $z = 2 + 3i$ e $w = 1 - i$ allora $|z + w| = \sqrt{12}$.

3. V | F Se $z = 3 - 4i$ allora $\dfrac{z\overline{z}}{z + 5i} = \dfrac{15}{2} - \dfrac{5}{2}i$.

4. V | F Se $z = 1 + \sqrt{3}\, i$ allora $\arg z = \frac{\pi}{4}$.

5. V | F L'equazione $2x^2 - x + 3 = 0$ ammette, nel campo dei numeri complessi, le soluzioni $x_1 = \frac{1}{4} + \sqrt{23}\, i$ e $x_2 = -\frac{1}{4} - \sqrt{23}\, i$.

6. V | F Se $u \in \mathbb{C}$, $|u| = 1$ allora $u = \cos\alpha + i \sin\alpha$.

7. V | F Se $u = \cos\alpha + i \sin\alpha$ allora la corrispondenza

$$z \mapsto (\cos\alpha + i \sin\alpha)z$$

è una rotazione attorno all'origine di angolo α.

8. V | F Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha

$$\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) = (\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta) + i(\cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta)$$

9. V | F Se $z = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4})$ allora $z^3 = 4(\cos\frac{3}{4}\pi + i \sin\frac{3}{4}\pi)$.

10. V | F La corrispondenza $z \mapsto 4z$ è un'omotetia di centro l'origine e costante 4.

1.4 Test di autovalutazione.

Test n.4

Rispondere a ciascun quesito per iscritto su questo foglio.

1. Scrivere in forma esponenziale il numero $z = 2 - 2i$.

2. Siano $z = 3(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8})$ e $w = 2(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$. Scrivere in forma esponenziale il numero $z \cdot w$.

3. Siano z e w due numeri complessi. Dimostrare che il coniugato della somma di z e w è uguale alla somma dei coniugati di z e di w. In altri termini, dimostrare che

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$$

4. Siano z e w due numeri complessi. Dimostrare che il coniugato del prodotto di z e w è uguale al prodotto dei coniugati di z e di w. In altri termini, dimostrare che

$$\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$$

5. Dimostrare che se $z \in \mathbb{C}$ è una radice del polinomio

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

dove $a, b, c \in \mathbb{R}$ allora anche $\overline{z}$ è radice di $p(x)$.

Dimostrare che questo risultato vale per un qualsiasi polinomio di grado n cioè dimostrare che se $z \in \mathbb{C}$ è una radice del polinomio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

allora anche $\overline{z}$ è radice di $p(x)$.

1.5 Circuiti elettrici in regime sinusoidale

Esercizio 1.1 *In un circuito elettrico in regime sinusoidale la tensione è descritta dalla funzione*

$$V(t) = V_M \cos(\omega t + \phi)$$

a) *Interpretare da un punto di vista fisico i parametri V_M, ω e ϕ.*

b) *La tensione $V(t)$ viene spesso rappresentata mediante un numero complesso (funzione del tempo). Quale? Spiegare.*

Esercizio 1.2 *Si consideri il circuito a regime sinusoidale rappresentato in figura*

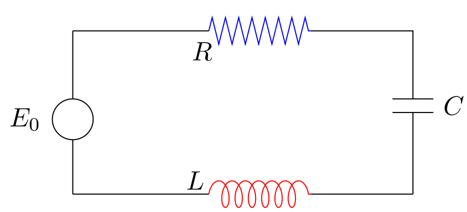

Fig. 1 - Circuito elettrico RLC.

Sapendo che $R = 10\ k\Omega$, $L = 50\ mH$, $C = 220\ nF$, $V_s = 10V$ e $f = 10\ kHz$

a) determinare l'impedenza totale;

b) determinare l'intensità di corrente che attraversa il circuito.

Soluzione.

L'impedenza totale Z del circuito è data da

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C \tag{1.1}$$

Si ricordi che $\omega = 2\pi f$, $Z_R = R$, $Z_L = \omega L j$ e $Z_C = \dfrac{1}{j\omega C} = -\dfrac{1}{\omega C} j$ (spiegare l'ultima uguaglianza). Sostituendo in (1.1) si ottiene:

$$Z = R + \omega L j - \frac{1}{\omega C} j \tag{1.2}$$

(Fare i calcoli).

Esercizio 1.3 *Scrivere $Z_L = \omega L j$ e $Z_C = -\dfrac{1}{\omega C} j$ in forma esponenziale*

1.6 Test di autovalutazione

Test n.5

Rispondere a ciascun quesito per iscritto su questo foglio.

1. Sia $\mathbb{C} \xrightarrow{R} \mathbb{C}$ la rotazione attorno all'origine di angolo $\frac{3}{4}\pi$. Scrivere in forma algebrica $R(1+i)$.

2. Si denoti con $\mathbb{C} \xrightarrow{R_o^\theta} \mathbb{C}$ la rotazione piana attorno all'origine di angolo θ definita da

$$R_o^\theta(z) = e^{i\theta} z$$

per ogni z in $\mathbb{C}$. Si denoti con $\mathbb{C} \xrightarrow{T_v} \mathbb{C}$ la traslazione individuata dal vettore v in $\mathbb{C}$ definita da

$$T_v(z) = z + v$$

per ogni z in $\mathbb{C}$. Dimostrare che ogni roto-traslazione $T_v \circ R_o^\theta$ con $\theta \neq 0 + 2k\pi$ ha esattamente un punto fisso.

3. Scrivere in forma algebrica il punto fisso della rototraslazione $F(z) = e^{i\frac{\pi}{2}} z + (2 - i)$.

4. Scrivere in forma esponenziale le radici terze di $1 - i$.

5. Sia $\mathbb{C} \xrightarrow{R} \mathbb{C}$ la rotazione attorno all'origine di angolo $\frac{\pi}{4}$ e $\mathbb{C} \xrightarrow{T} \mathbb{C}$ la traslazione del numero $v = \sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$. Scrivere in forma algebrica $(T \circ R)(2i)$.

6. Dimostrare che la funzione

$$\mathbb{C} \xrightarrow{S} \mathbb{C}, \quad S(z) = e^{i\frac{\pi}{3}}\overline{z} \tag{1.3}$$

è una simmetria assiale avente per asse la retta r che passa per l'origine e formante con l'asse delle x un angolo pari a $\frac{\pi}{6}$ (Suggerimento: verificare che i punti fissi di S sono tutti e soli i punti della retta r).

In generale vale il seguente teorema: la funzione

$$\mathbb{C} \xrightarrow{S} \mathbb{C}, \quad S(z) = e^{i2\theta}\overline{z} \tag{1.4}$$

è una simmetria assiale avente per asse la retta per l'origine formante con l'asse delle x un angolo pari a θ.

7. Rappresentare nel piano complesso i seguenti insiemi:

a) $E = \{z \in \mathbb{C} \ \mid \ 1 < |z| < 2, \ \frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \pi\}$

b) $F = \{w \in \mathbb{C} \ \mid \ w = z^2, \ \textit{con } z \in E\}$

8. Vero o Falso? Siano S_r e S_t due simmetrie assiali rispettivamente di assi r e t.

Se $r \cap t = P$ (cioè , se le rette r e t sono incidenti nell'unico punto P) allora l'isometria $S_r \circ S_t$ è una rotazione attorno al punto P.

1.7 Soluzioni

Test n.1

1. $z + z' = \frac{9}{2} + (2 + \frac{5}{2}\sqrt{3})i$, $zz' = (5 - 5\sqrt{3}) + (5 + 5\sqrt{3})i$ **2.** $z^{-1} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **3.** $z^7 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ **4.** $zw = 10(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$ **5.** $x_1 = -1 - 2i$, $x_1 = -1 + 2i$ **6.** $-\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$ **7.** $-\frac{5}{2}i$ **8.** $z^{-1} = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{10} - i\sin\frac{\pi}{10})$ **9.** $z = 3\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ **10.** Se $z = x+iy \in E$ allora $1 \leq x \leq 2$, l'insieme E è formato dai numeri complessi che si trovano nella striscia (verticale) delimitata dalle rette $x = 1$ e $x = 2$.

Test n.2

1. $i^{345} = i$ **2.** $\overline{z} = 2 + \sqrt{3}i$, z e $\overline{z}$ sono simmetrici rispetto all'asse delle ascisse. **3.** $z_1 + z_2 = 1 + 4i$, $z_1 z_2 = -5 - i$ **4.** $z = |z|\frac{z}{|z|}$ e $\frac{z}{|z|}$ è un numero complesso unitario, quindi si può scrivere nel seguente modo ... **5.** $z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\pi 3)$ **6.** z è unitario, infatti $|z| = 1$ **7.** Se $u = \cos\alpha + i\sin\alpha$ e $v = \cos\beta + i\sin\beta$ $uv = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$. Pertanto uv è un numero complesso unitario di argomento $\alpha + \beta$. **8.** $zi = -3 + 2i$, zi è il numero complesso che si ottiene ruotando z attorno all'origine di un angolo pari a $\frac{\pi}{2}$. **9.** $z + \overline{z} = 4$ è un numero reale. Se $z = x + iy$ allora $z + \overline{z} = 2x$. **10.** $z \cdot \overline{z} = 29$ è un numero reale. Se $z = x + iy$ allora $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$.

Test n.3

1. Falso, $z^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ **2.** Falso, $z + w = 3 + 2i$ e $|z + w| = \sqrt{13}$ **3.** Vero, $\dfrac{z\overline{z}}{z + 5i} = \dfrac{25}{(3+i)} = \dfrac{25}{(3+i)}\dfrac{(3-i)}{(3-i)} = \dfrac{25(3-i)}{10} = \dfrac{15}{2} - \dfrac{5}{2}i.$ **4.** Falso, $argz = \frac{\pi}{3}$ **5.** Falso, le radici dell'equazione devono essere due numeri complessi coniugati. Si ha: $x_1 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{23}}{4}i$ e $x_2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{23}}{4}i$ **6.** Vero, $\cos\alpha + i\sin\alpha$ è un numero complesso unitario. **7.** Vero, la moltiplicazione per un numero complesso unitario è una rotazione attorno all'origine. **8.** Vero, eguagliando le parti reali dei due numeri complessi si ottiene la formula di addizione del coseno mentre eguagliando le parti immaginarie si ottiene la formula di addizione del seno **9.** Falso, $z^3 = 8(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi)$ **10.**Vero, la trasformazione complessa $z \mapsto 4z$ "dilata" ogni vettore z del fattore 4.

Test n.4

1. $z = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{7}{4}\pi}$ **2.** $z \cdot w = 6\,e^{i\frac{5}{24}\pi}$

3. Se $z = a + ib$ e $w = c + id$ abbiamo $z + w = (a + c) + i(b + d)$ (ricorda come è stata definita l'addizione di due numeri complessi). Quindi,

$$\overline{z + w} = (a + c) - i(b + d) \tag{1.5}$$

Inoltre $\overline{z} = a - ib$ e $\overline{w} = c - id$ e

$$\overline{z} + \overline{w} = (a - ib) + (c - id) = (a + c) - i(b + d) \tag{1.6}$$

Dalle uguaglianze (1.5) e (1.6) segue la tesi, cioè $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.

4. Se $z = a + ib$ e $w = c + id$ abbiamo $zw = (ac - bd) + i(bc + ad)$. Quindi,

$$\overline{zw} = (ac - bd) - i(bc + ad) \tag{1.7}$$

Inoltre $\overline{z} = a - ib$ e $\overline{w} = c - id$ e quindi

$$\overline{z}\,\overline{w} = (a - ib)(c - id) = (ac - bd) - i(bc + ad) \tag{1.8}$$

Dalle uguaglianze (1.7) e (1.8) segue la tesi, cioè $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$.

Test n.5

1. $R(1 + i) = -\sqrt{2}$ **2.** Si veda la dimostrazione riportata nel file “complessi-2010.pdf” reperibile nel sito della scuola. **3.** Il punto fisso è $z = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ **4.**