Note di combinatoria

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria. Maggio 2020.[1]

Indice

[1] Nome file: coefficiente_multinomiale_2020.tex

1 Coefficiente multinomiale

1.1 Permutazioni con ripetizione

Problema 1.1. *Escogitare un metodo per contare le permutazioni di n oggetti, di cui k_1 sono uguali tra loro, k_2 sono uguali tra loro, $\dots k_r$ sono uguali tra loro.*

Soluzione.

Si può ragionare nel modo seguente:

• Se gli n oggetti sono tutti distinti, il numero di permutazioni è $n!$.

• Se tra gli n oggetti c'è un blocco di k_1 oggetti uguali tra loro, il numero di permutazioni è $\dfrac{n!}{k_1!}$ perchè la permutazione non cambia permutando i k_1 oggetti identici.

• Se tra gli n oggetti c'è un secondo blocco con k_2 oggetti uguali tra loro, le permutazioni totali sono $\frac{n!}{k_1!k_2!}$ perchè la permutazione non cambia permutando i k_2 oggetti identici del secondo blocco.

• ...

• Se tra gli n oggetti, l'r−esimo blocco è formato da k_r oggetti uguali fra loro, allora il numero totale di permutazioni è $\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_r!}$ perchè, ancora una volta, la permutazione non cambia permutando i k_r oggetti dell'ultimo blocco. ■

Proposizione 1.2. *Il numero di permutazioni di n oggetti, di cui k_1 sono uguali tra loro, k_2 sono uguali tra loro, $\dots k_r$ sono uguali tra loro è*

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,\dots k_r!}$$

Esempio. Trovare tutti gli anagrammi della parola MISSISSIPPI.

Soluzione. La parola è formata da 11 lettere di cui una 'M', quattro 'S', quattro 'I' e due 'P'. Il numero totale di anagrammi è $\dfrac{11!}{1!\,4!\,4!\,2!}$.

Il numero $\binom{n}{k_1,k_2,\dots,k_r} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\dots k_r!}$, con $k_1, k_2, \dots, k_r$ interi non negativi e $k_1+k_2+\dots+k_r = n$ si chiama *coefficiente multinomiale.*

Va notato che, avendo posto $0! = 1$, il coefficiente multinomiale è definito anche quando almeno uno dei coefficienti $k_1, k_2, \dots, k_r$ vale zero; per esempio $\binom{4}{3,1,0} = \frac{4!}{3!1!0!}$.

1.2 Funzioni con cardinalità delle fibre assegnata

Problema 1.3. *Escogitare un metodo per contare le funzioni*

$$[n] \xrightarrow{f} [r]$$

per le quali $|f^{-1}(1)| = k_1, |f^{-1}(2)| = k_2, \dots |f^{-1}(r)| = k_r$

Soluzione. Innanzi tutto, bisogna scegliere i k_1 elementi del dominio che hanno per immagine 1: ci sono $\binom{n}{k_1}$ scelte possibili. Restano a disposizione $n - k_1$ elementi del dominio, tra i quali bisogna scgliere k_2 elementi che hanno per immagine 2: le scelte a disposizione sono $\binom{n-k_1}{k_2}$. Procedendo in questo modo si giunge a dover scegliere i k_{r-1} elementi del dominio che hanno per immagine $r-1$; poichè gli elementi del dominio rimasti sono $n - k_1 - k_2 - \cdots - k_{r-2}$, le scelte possibili sono $\binom{n-k_1-k_2-\cdots-k_{r-2}}{k_{r-1}}$. Infine nel dominio restano a disposizione k_r elementi, esattamente quelli che hanno per immagine r. Nell'ultimo caso la scelta è unica. Segue che il numero complessivo di scelte a disposizione per costruire le funzioni richieste è

$$\binom{n}{k_1} \cdot \binom{n-k_1}{k_2} \cdot \binom{n-k_1-k_2}{k_3} \cdot \quad \dots \quad \cdot \binom{n-k_1-k_2-\cdots-k_{r-2}}{k_{r-1}} \tag{1.1}$$

Ora si tratta di scrivere meglio il numero scritto in (1.1): sostituendo al posto di ogni coefficiente binomiale $\binom{a}{b}$ l'espressione $\frac{a!}{b!(a-b)!}$ si ottiene:

$$\binom{n}{k_1} \cdot \binom{n-k_1}{k_2} \cdot \binom{n-k_1-k_2}{k_3} \cdot \dots \cdot \binom{n-k_1-k_2-\cdots-k_{r-2}}{k_{r-1}}$$

$$= \frac{n!}{k_1!\cancel{(n-k_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-k_1)!}}{k_2!\cancel{(n-k_1-k_2)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-k_1-k_2)!}}{k_3!\cancel{(n-k_1-k_2-k_3)!}} \cdot \dots \cdot \frac{\cancel{(n-k_1-k_2-\dots k_{r-2})!}}{k_{r-1}!(n-k_1-k_2-k_3-\cdots-k_{r-1})!}$$

$$= \frac{n!}{k_1!\, k_2!\, k_3!\, \dots\, k_{r-1}!\, k_r!}$$

dove, per scrivere l'ultima uguaglianza si è utilizzato: $k_r = n - k_1 - k_2 - k_3 - \cdots - k_{r-1}$. ■

Esempio.

Trovare tutte le funzioni $[11] \xrightarrow{f} [3]$ per le quali

$$|f^{-1}(1)| = 2, \quad |f^{-1}(2)| = 5 \quad \text{e} \quad |f^{-1}(3)| = 4$$

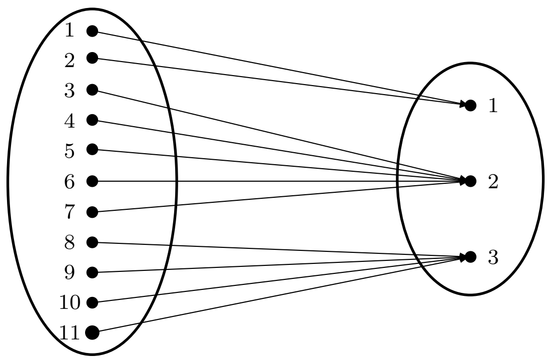

Figura 1: Funzione che rispetta le condizione richieste: le cardinalità delle fibre di $1, 2, 3$ sono rispettivamente $2, 5, 4$.

Soluzione.

I domini delle funzioni richieste sono formate da 11 elementi. Le fibre di $1, 2, 3$ (elementi del codominio) devono avere cardinalità, nell'ordine, due, cinque e quattro: questo signfica che le controimmagini di 1 devono essere esattamente due, quelle di 2 esattamente cinque e infine quelle di 3 esattamente quattro. Le funzioni richieste sono

$$\frac{11!}{2!\,5!\,4!}$$

1.3 Partizioni di un insieme

Definizione 1.4 (Partizione di un insieme.)**.** *Sia X un insieme non vuoto di n elementi. Una* partizione *di X è una collezione*

$$P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_r$$

di r $(r > 0)$ sottoinsiemi di X con le seguenti proprietà :

1. *i sottoinsiemi $P_1, P_2, \ldots, P_r$ di X non sono vuoti ($P_i \neq \emptyset$, per $i = 1, 2, \ldots, r$).*
2. *i sottoinsiemi $P_1, P_2, \ldots, P_r$ di X sono a due a due disgiunti, cioè $P_i \cap P_j = \emptyset$, per ogni $i \neq j$ con $i, j = 1, 2, \ldots, r$.*
3. *l'unione di tutti i sottoinsiemi $P_1, P_2, \ldots, P_r$ è uguale a X ($X = \bigcup_{i=1}^{r} P_i$).*

Se valgono le tre proprietà enunciate, $P_1, P_2, \ldots, P_r$ si dicono blocchi *di X.*

Esempio. Sia X l'insieme delle 26 lettere dell'alfabeto inglese e sia P_1 il sottoinsieme delle vocali, P_2 il sottoinsieme delle lettere che compaiono nell'alfabeto inglese ma non in quello italiano, P_3 le restanti consonanti, cioè

$$P_1 = \{a, e, i, o, u\}, \quad P_2 = \{j, k, x, y, w\}, \quad P_3 = \{b, c, d, f, g, h, i, l, m, n, p, q, r, s, t, v, z\}$$

Allora la collezione $P_1, P_2 P_3$ costituisce una partizione di X, infatti tutti e tre i sottoinsiemi contengono almeno un elemento, a due a due sono disgiunti e la loro unione è uguale a X.

In altre parole, una *partizione* di un insieme non vuoto X è una famiglia di sottoinsiemi non vuoti di X, detti *blocchi*, tali che ogni elemento di X appartiene a un blocco, e a uno solo.

Contare le partizioni di un insieme è un problema difficile: servono i numeri di Bell, che in queste note non sono stati trattati. Tuttavia è possibile contare le partizioni di un insieme in alcuni casi particolari, servendosi del coefficiente binomiale.

Numero di partizioni con cardinalità dei blocchi assegnata

Sia X un insieme non vuoto di n elementi. Il numero di partizioni $P_1, P_2, \ldots, P_r$ formate da r $(r > 0)$ blocchi, ciascuna delle quali di cardinalità $k_1, k_2, \ldots, k_r$ (con $k_1 + k_2 + \ldots k_r = n$) è

$$\frac{1}{m_1! \cdots m_h!} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r} \qquad (1.2)$$

I coefficienti $m_1, m_2, \dots m_h!$ indicano il numero di blocchi con la stessa cardinalità . In altre parole, se ci sono m_i blocchi con la stessa cardinalità , bisogna dividere il coefficiente multinomiale per $m_i!$. Per esempio, sia $n = 2$, $r = 2$, $k_1 = k_2 = 1$. C'è una sola partizione di $X = \{a, b\}$ in due blocchi, ciascuno di cardinalità 1, e precisamente: $\{\{a\}, \{b\}\}$:

$$\frac{1}{2!}\binom{2}{1!\,1!} = 1$$

Ovviamente se i blocchi hanno cardinalità distinte le partizioni sono $\binom{n}{k_1,k_2,\dots,k_r}$ (Esercizio: parafrasare il ragionamento proposto sopra per contare le funzioni con cardinalità delle fibre assegnata.)

1.4 Generalizzazione del teorema del binomio di Newton

Utilizzando il coefficiente multinomiale è possibile generalizzare il teorema del binomio

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_1^{n-k}\, x_2^k$$

al caso di r addendi, con $r > 2$.

Teorema 1.5 (Generalizzazione del teorema del binomio)**.**

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_r=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} x_1^{k_1}\, x_2^{k_2}\, \dots x_r^{k_r} \tag{1.3}$$

La dimostrazione, sebbene non sia difficile, non viene qui riportata. L'enunciato dice questo: la potenza $(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n$ è esprimibile mediante una certa somma che può essere così determinata:

1. si scrvono tutti i monomi omogenei di grado n nelle indeterminate $x_1, x_2, \dots, x_r$

   $$x_1^{k_1}\, x_2^{k_2}\, \dots x_r^{k_r}$$

   i numeri $k_1, k_2, \dots, k_r$ sono interi non negativi la cui somma è uguale a n.

2. si moltiplica ciascun monomio $x_1^{k_1}\, x_2^{k_2}\, \dots x_r^{k_r}$ per il coefficiente multinomiale $\binom{n}{k_1,k_2,\dots,k_r}$

   $$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} x_1^{k_1}\, x_2^{k_2}\, \dots x_r^{k_r}$$

3. si sommano tutti termini.

Per esempio, per scrivere lo sviluppo di $(x_1 + x_2 + x_3)^2$, si trovano tutti i monomi omogenei di grado 2 nelle indeterminate x_1, x_2, x_3:

$$x_1^2,\ x_2^2,\ x_3^2,\ x_1x_2,\ x_1x_3,\ x_2x_3$$

si moltiplica ciascun monomio per il rispettivo coefficiente multinomiale

$$\binom{2}{2,0,0}x_1^2,\ \binom{2}{0,2,0}x_2^2,\ \binom{2}{0,0,2}x_3^2,\ \binom{2}{1,1,0}x_1x_2,\ \binom{2}{1,0,1}x_1x_3,\ \binom{2}{0,1,1}x_2x_3$$

e infine si sommano tutti i termini. Il risultato, per altro già noto, è

$$(x_1+x_2+x_3)^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$$

2 Esercizi di riepilogo

Esercizio 2.1. *Una commissione è composta da* 5 *persone ed è formata casualmente da un insieme costituito da* 6 *uomini e* 9 *donne. In quanti modi si può formare una commissione composta da* 2 *uomini e* 3 *donne?*

Esercizio 2.2. *Le attuali targhe automobilistiche sono formate da* 2 *lettere (che si possono ripetere),* 3 *numeri(la cui prima cifra può essere zero), due lettere (che si possono ripetere). Se per le lettere si usano i* 26 *simboli dell'alfabeto inglese e per le cifre gli usuali* 10 *simboli della notazione decimale, quante sono le possibili targhe?*

Esercizio 2.3. *Da un'urna contenente n palline numerate vengono estratte k palline ($k \leq n$) una alla volta. Determinare il numero totale di estrazioni nel caso in cui*

(a) *ogni volta la pallina venga rimessa nell'urna (campionamento con rimbussolamento)*

(b) *ogni volta la pallina non venga rimessa nell'urna (campionamento senza rimbussolamento)*

In questo contesto per 'estrazione' si intende una sequenza ordinata *di k palline.*

Esercizio 2.4. *Trovare il numero di funzioni*

$$[k] \longrightarrow [n]$$

strettamente crescenti.

Esercizio 2.5. *(Questo esercizio è più difficile degli altri!) Trovare il numero di funzioni*

$$[k] \longrightarrow [n]$$

non decrescenti.

Esercizio 2.6. *Trovare il coefficiente del termine* x^2y^3z *nello sviluppo di* $(x+y+z)^6$.

Esercizio 2.7. *Rispondere ai seguenti quesiti*

1. *In quanti modi si possono distribuire* 52 *carte (da gioco) a quattro giocatori?*
2. *In quanti modi si possono distribuire* 52 *carte (da gioco) a quattro giocatori in modo tale ognuno di loro abbia un asso?*