Trigonometria. Esercizi

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Dicembre 2013[1]

Indice

[1] File: 2014-trigonometria-esercizi.tex

1 Test n.1

Rispondere ai seguenti quesiti di tipo "Vero/Falso?" mettendo una crocetta nella casella prescelta.

Per ogni risposta scrivere su questo stesso foglio motivazioni chiare e dettagliate (riportare con cura definizioni, dimostrazioni e controesempi). Le risposte prive di adeguate spiegazioni non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione della prova. Tempo della prova: 55 minuti.

Vero o Falso?

1. $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ Se $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ allora $\tan\alpha = -1$
2. $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ Per ogni $\alpha \in \Big(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\Big)$ si ha $\tan\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
3. $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ La funzione $[0, 2\pi] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ è invertibile.
4. $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\cos(-\alpha) = -\cos\alpha$.
5. $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, con $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$ $(k = \pm 1 \pm 2 \dots)$ si ha: $\tan\alpha = \tan(\alpha + \pi)$.
6. $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ Per ogni $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ si ha: $\tan x = |\tan x|$.
7. $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ Per ogni $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ si ha: $\cos x = \cos|x|$.
8. $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
9. $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ Se $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ allora f è invertibile e $f^{-1}(x) = \arcsin x$.
10. $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ Per ogni $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ si ha: $\cos x > \sin x$.

Spiegazioni. (*Utilizzare anche il retro del foglio.*)

2 Test n.2

Eseguire i seguenti esercizi per iscritto su questo foglio. Tempo della prova: 50 minuti.

Esercizio 1.

a) Disegnare il grafico di $[0, 2\pi] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$

b) Disegnare il grafico della funzione $[0, 2\pi] \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, $g(x) = \sin(x - \frac{\pi}{6})$. Che cosa hanno in comune i due grafici?

Esercizio 2.

Disegnare il grafico della funzione $[0, 2\pi] \xrightarrow{h} \mathbb{R}$, $h(x) = \sin(3x)$ e confrontarlo con il grafico di $[0, 2\pi] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Scrivere sinteticamente analogie e differenze.

Esercizio 3.

Disegnare il grafico della funzione $[0, 2\pi] \xrightarrow{k} \mathbb{R}$, $k(x) = 2\sin x$ e confrontarlo con il grafico di $[0, 2\pi] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Scrivere sinteticamente analogie e differenze.

Esercizio 4*.

Servendosi dei risultati degli esercizi precedenti disegnare il grafico della funzione

$$[0, 2\pi] \xrightarrow{t} \mathbb{R}, \; t(x) = 4\sin(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{\pi}{6})$$

(*Suggerimento: NON costruire il grafico "per punti".*)

Esercizio 5.

Fissati tre numeri reali A, ω, k, si consideri la funzione

$$[0, 2\pi] \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \; f(x) = A\sin(\omega x + k)$$

Fornire un'interpretazione geometrica dei parametri A, ω e k.

RISPOSTE.

3 Test n.3

Rispondere per iscritto sul foglio protocollo. Tempo della prova: 55 minuti.

Vero o Falso? *Rispondere ai seguenti "Vero/Falso?". Per ogni risposta data fornire motivazioni chiare e dettagliate scrivendo con cura le necessarie 'definizioni', 'dimostrazioni' e 'controesempi'. Le risposte prive di adeguate spiegazioni non saranno prese in considerazione ai fini della valutazione della prova.*

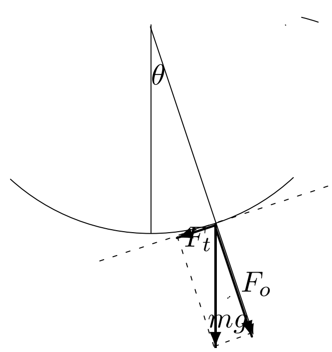
1. $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ Per ogni $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ allora $\sec\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ Se $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ allora $-1 < \tan\alpha < 1$
3. $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ Se $x \in [0, \frac{\pi}{4})$ allora $\cos x > \sin x$.
4. $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\sin(-\alpha) = \sin\alpha$.
5. $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ Se $\alpha = \frac{\pi}{6}$ allora $\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Esercizio 1. Dopo aver tracciare il grafico della funzione $[0, 4\pi] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ risolvere l'equazione $\cos x = -\frac{1}{2}$ nell'intervallo $[0, 4\pi]$.

Esercizio 2. Tracciare il grafico della funzione $[0, 2\pi] \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, $g(x) = 3\sin(2x - \frac{\pi}{3})$. Qual è il periodo della funzione g?

Esercizio 3. Un corpo soggetto all'azione di una forza costante $\mathbf{F}$ subisce lo spostamento $\mathbf{s}$. Sapendo che $\widehat{\mathbf{Fs}} = 27^0$, $\mid \mathbf{s} \mid = 16m$, $\mid \mathbf{F} \mid = 42\,N$ determinare il lavoro compiuto dalla forza $\overrightarrow{F}$. (Approssimare la soluzione a meno di un millesimo).

Esercizio 4. La configurazione di un pendolo semplice all'istante t è quella rappresentata in figura. Nell'ipotesi che $\theta = \frac{\pi}{20}$ e $m = 1\,kg$, trovare l'intensità della forza F_t. (Approssimare la soluzione a meno di un millesimo).



4 Test n.4

Rispondere per iscritto sul foglio protocollo. Tempo della prova: 55 minuti.

Vero o Falso? *Motivare le risposte in modo preciso e dettagliato, in particolare scrivere con molta cura 'definizioni', 'dimostrazioni' e 'controesempi' giudicati essenziali per la spiegazione.*

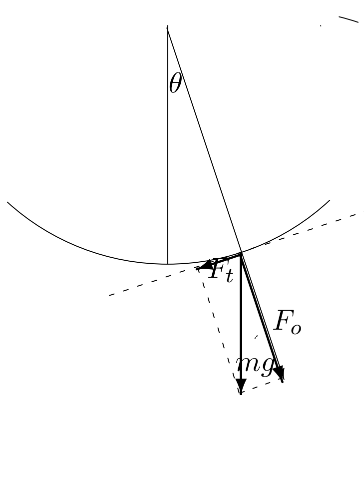
1. $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ Per ogni $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$ allora $\sec\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
2. $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ Se $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ allora $-1 < \tan\alpha < 1$
3. $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ Se $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ allora $\sin x > \cos x$.
4. $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\tan(-\alpha) = \tan\alpha$.
5. $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ Se $\alpha = \frac{\pi}{3}$ allora $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Esercizio 1. Dopo aver tracciare il grafico della funzione $[0, 4\pi] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ risolvere l'equazione $\sin x = -\frac{1}{2}$ nell'intervallo $[0, 4\pi]$.

Esercizio 2. Tracciare il grafico della funzione $[0, 2\pi] \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, $g(x) = 3\cos(2x - \frac{\pi}{3})$. Qual è il periodo della funzione g?

Esercizio 3. Un corpo soggetto all'azione di una forza costante $\mathbf{F}$ subisce lo spostamento $\mathbf{s}$. Sapendo che $\widehat{\mathbf{Fs}} = 26^0$, $|\ \mathbf{s}\ | = 15m$, $|\ \mathbf{F}\ | = 43\,N$ determinare il lavoro compiuto dalla forza $\overrightarrow{F}$. (Approssimare la soluzione a meno di un millesimo).

Esercizio 4. La configurazione di un pendolo semplice all'istante t è quella rappresentata in figura. Nell'ipotesi che $\theta = \frac{\pi}{24}$ e $m = 1\,kg$, trovare l'intensità della forza F_t. (Approssimare la soluzione a meno di un millesimo).



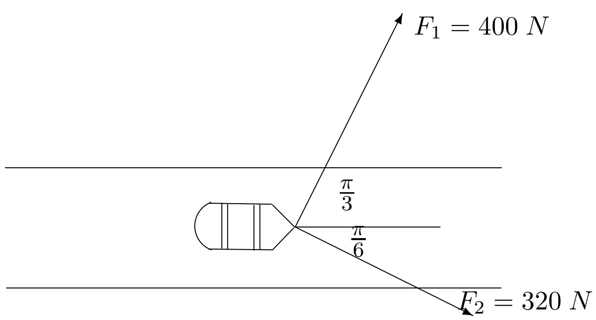
5 Test n.5

Rispondere per iscritto sul foglio protocollo. Tempo della prova: 55 minuti.

Esercizio 1. Si sta percorrendo un tratto di strada e un cartello segnala che la pendenza è del 15%. Che cosa significa? Spiegare.

Esercizio 2. Il rapporto tra i cateti di un triangolo rettangolo è $2 + \sqrt{3}$. Determinare l'ampiezza degli angoli acuti del triangolo.

Esercizio 3. Due uomini tirano una barca lungo un canale servendosi di due funi (la situazione e le forze esercitate sono quelle indicate in figura). Poichè si accorgono che la barca andrebbe a finire contro un argine fanno intervenire una terza persona che aiuta uno di loro a tirare la fune. Nell'ipotesi che non vengano modificate le direzioni delle corde quale dei due uomini deve essere aiutato? Qual è l'intensità della forza che la terza persona deve esercitare affinché la barca si sposti mantenendosi al centro del canale?



Esercizio 4.(Coordinate polari.) Le *coordinate polari* sono un sistema di coordinate alternativo per descrivere la posizione di punti nel piano. Per fissare un sistema di coordinate polari nel piano occorre fissare un punto O detto *polo* e una semiretta r uscente da O detta *asse polare*. Con queste scelte un qualunque punto P del piano è indiviuato da una coppia ordinata di numeri reali (r, θ), dove

- r è la distanza di O da P;
- θ (con $0 \leq \theta < 2\pi$) è l'angolo individuato dall'asse polare e il raggio vettore $\overrightarrow{OP}$ (si veda la figura).

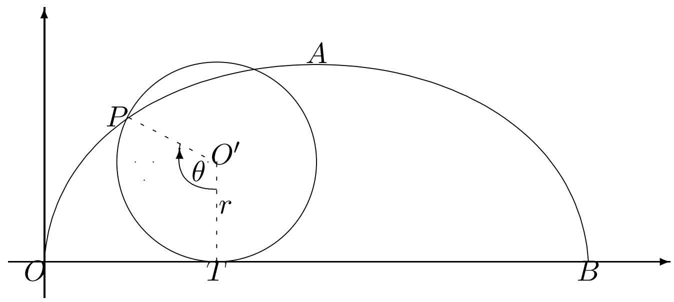
In un piano si fissa sia un sistema di coordinate cartesiane sia un sistema di coordinate polari in modo tale che

a) l'origine O degli assi cartesiani coincida con il polo;

b) il semiasse positivo delle ascisse x^+ coincida con l'asse polare.

Trovare le relazioni esistenti tra le coordinate cartesiane (x, y) e le coordinate polari (r, θ) di un medesimo punto P del piano.

Esercizio 5.(Equazioni parametriche della cicloide.) Si fissi nel piano un sistema di riferimento cartesiano xOy, si prenda un disco di raggio r e lo si ponga nel piano in modo tale che il centro C del disco si trovi nel punto di coordinate $(0, r)$. Sia P il punto sulla circonferenza del disco che risulta sovrapposto all'origine degli assi cartesiani. Si faccia ora rotolare (senza strisciare) il disco lungo l'asse delle x. Che tipo di curva descrive il punto P? Se θ è l'angolo formato dal raggio $\overline{CP}$ con la verticale condotta all'asse delle ascisse, trovare le equazioni della curva in esame.



Risposte.

Esercizio 1. Si sta percorrendo una strada che forma un angolo con il piano orizzontale pari a $\arctan \frac{15}{100}$.

Esercizio 5. Se r è il raggio del cerchio generatore della cicloide, le sue equazioni parametriche, in funzione dell'angolo θ, sono:

$$\begin{cases} x = \theta r - r\sin\theta \\ y = r - r\cos\theta \end{cases} \tag{5.1}$$

6 Test n.6

Esercizio 1.(**Formule di duplicazione**) Dimostrare che

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \text{ e } cos2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

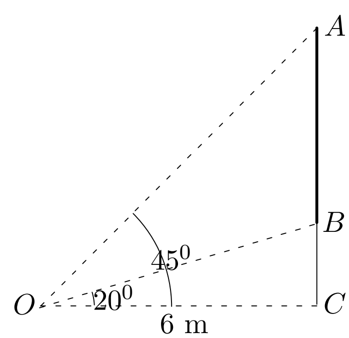
(Suggerimento: $\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) =$ (ora, usare le formule di addizione...).

Esercizio 2.

1. Tracciare il grafico della funzione $[0, 2\pi) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x + 3$. Trovare, se esistono, gli zeri di tale funzione.

2. Risolvere l'equazione $\cos x + 3 = \frac{7}{2}$

Esercizio 3. Si vuole misurare una statua che si trova su un piedistallo (In figura si è schematizzato la statua con il segmento AB e il piedistallo con BC). Un ossevatore si trova esattamente a 6 m dal piedistallo e stima 20^0 l'ampiezza dell'angolo sotto cui vede la base della statua (angolo di elevazione) mentre stima 45^0 l'ampiezza dell'angolo sotto cui vede la sommità della statua. Qual è l'altezza della statua valutata dall'osservatore?



Esercizio 4. Risolvere in $[-\pi, +\pi)$ le seguenti equazioni

1. $\tan^2 x - \tan x = 0$
2. $2\sin x + \sqrt{3} = 0$
3. $\cos(2x - \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2} = 0$
4. $\cos^2 x + 2\sin x = 0$
5. $4\cos^2 x - 1 = 0$
6. $2\cos^2 x - \sin x = 1$

Esercizio 5. Siano α e β gli angoli acuti di un triangolo rettangolo. Dimostrare che

$$\sin\alpha + \cos\alpha = sin\beta + \cos\beta$$

(Suggerimento: la somma degli angoli acuti di un triangolo rettangolo è $\frac{\pi}{2}$, pertanto $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \dots$)

Esercizio 6. Risolvere in $[0, 2\pi)$ le seguenti disequazioni

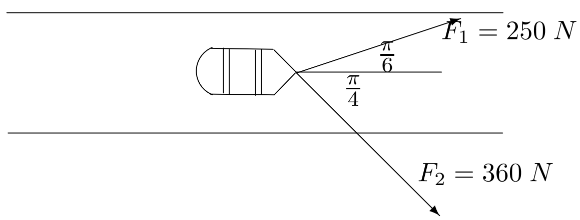
1. $2 \sin x - \sqrt{2} > 0$
2. $\tan x > 1$
3. $2 \cos x + \frac{1}{2} < 0$

7 Test n.7

Esercizio 1. Disegnare il grafico della funzione $[0, 2\pi] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = 4\sin(2x - \frac{\pi}{2})$. Qual è il periodo della funzione f?

Esercizio 2. Il rapporto tra i cateti di un triangolo rettangolo è $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Determinare l'ampiezza degli angoli acuti del triangolo.

Esercizio 3. Due uomini tirano una barca lungo un canale servendosi di due funi (la situazione e le forze esercitate sono quelle indicate in figura). Poichè si accorgono che la barca andrebbe a finire contro un'argine si fanno aiutare da una un'altra persona che li aiuta tirando una terza corda che è stata annodata alla barca nel medesimo punto delle altre due. Trovare la direzione, il verso e l'intensità minima della forza esercitata dalla terza persona affinché la barca si sposti mantenendosi al centro del canale.



Esercizio 4. Risolvere in $[-\pi, +\pi)$ le seguenti equazioni

1. $2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$
2. $2\cos x + \sqrt{3} = 0$

Esercizio 5. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni

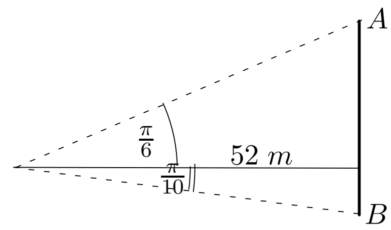
1. $[0, 2\pi) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x + \pi$.
2. $[0, 2\pi) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x + \pi)$.

Esercizio 6. Un osservatore O deve misurare l'altezza di un edificio che in figura è schematizzato dal segmento AB. Se i dati conosciuti sono quelli riportati in figura, qual è la misura dell'altezza dell'edificio? (Approssimare la risposta a meno di un decimo).

Esercizio 7. Le coordinate cartesiane di un punto P sono $(12, 4\sqrt{3})$. Trovare le coordinate polari di P nell'ipotesi che il polo coincida con l'origine degli assi cartesiani e che l'asse polare coincida con l'asse x.

Esercizio 8 . Siano α e β gli angoli acuti di un triangolo rettangolo. Dimostrare che $\sin\alpha + \cos\alpha = sin\beta + \cos\beta$.

Esercizio 9. Un corpo soggetto all'azione di una forza costante $\mathbf{F}$ subisce lo spostamento $\mathbf{s}$. Sapendo che $\widehat{\mathbf{Fs}} = 35^0$, $|\ \mathbf{s}\ | = 18m$, $|\ \mathbf{F}\ | = 96\,N$ determinare il lavoro compiuto dalla forza $\overrightarrow{F}$. (Approssimare la soluzione a meno di un centesimo).



Esercizio 10. Risolvere in $[0, 2\pi)$ le seguenti disequazioni

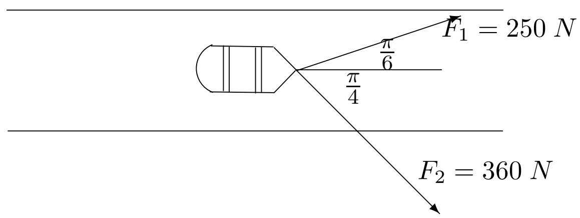
1. $2\cos x - 1 > 0$
2. $3\tan x + \sqrt{3} > 0$

8 Test n.8

Esercizio 1. Disegnare il grafico della funzione $[0, 2\pi] \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, $g(x) = 3\cos(2x + \frac{\pi}{2})$. Qual è il periodo della funzione f?

Esercizio 2. Il rapporto tra i cateti di un triangolo rettangolo è $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$. Determinare l'ampiezza degli angoli acuti del triangolo.

Esercizio 3. Due uomini tirano una barca lungo un canale servendosi di due funi (la situazione e le forze esercitate sono quelle indicate in figura). Poichè si accorgono che la barca andrebbe a finire contro un'argine si fanno aiutare da una un'altra persona che li aiuta tirando una terza corda che è stata annodata alla barca nel medesimo punto delle altre due. Trovare la direzione, il verso e l'intensità minima della forza esercitata dalla terza persona affinché la barca si sposti mantenendosi al centro del canale.



Esercizio 4. Risolvere in $[-\pi, +\pi)$ le seguenti equazioni

1. $2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$
2. $2\sin x + \sqrt{3} = 0$

Esercizio 5. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni

1. $[0, 2\pi) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x + \frac{\pi}{2}$.
2. $[0, 2\pi) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$.

Esercizio 6. Un osservatore O deve misurare l'altezza di un edificio che in figura è schematizzato dal segmento AB. Se i dati conosciuti sono quelli riportati in figura, qual è la misura dell'altezza dell'edificio? (Approssimare la risposta a meno di un decimo).

Esercizio 7. Le coordinate cartesiane di un punto P sono $(6, 2\sqrt{3})$. Trovare le coordinate polari di P nell'ipotesi che il polo coincida con l'origine degli assi cartesiani e che l'asse polare coincida con l'asse x.

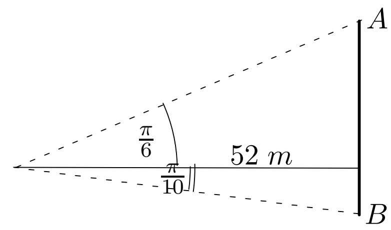
Esercizio 8 . Dimostrare che $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 9. Un corpo soggetto all'azione di una forza costante $\mathbf{F}$ subisce lo spostamento $\mathbf{s}$. Sapendo che $\widehat{\mathbf{Fs}} = 33^0$, $|\ \mathbf{s}\ |= 15m$, $|\ \mathbf{F}\ |= 91\,N$ determinare il lavoro compiuto dalla forza $\overrightarrow{F}$. (Approssimare la soluzione a meno di un centesimo).

Esercizio 10. Risolvere in $[0, 2\pi)$ le seguenti disequazioni

1. $2\sin x - 1 > 0$
2. $3\tan x - \sqrt{3} > 0$



9 Test n.9

Risolvere i seguenti esercizi per iscritto sul foglio protocollo.

Esercizio 1. Un vettore ha un'inclinazione rispetto rispetto all'orizzontale di $\alpha = \frac{\pi}{3}$ e intensità pari a 67. Trovare le componenti del vettore nella direzione orizzontale e verticale rispetto al terreno.

Esercizio 2. Un corpo soggetto all'azione di una forza costante $\mathbf{F}$ subisce lo spostamento $\mathbf{s}$. Sapendo che $\widehat{\mathbf{Fs}} = 18^0$, $\mid \mathbf{s} \mid = 28m$, $\mid \mathbf{F} \mid = 44\,N$ determinare il lavoro compiuto dalla forza $\overrightarrow{F}$. (Approssimare la soluzione a meno di un decimo).

Esercizio 3.

1. Tracciare il grafico della funzione $[0, 2\pi) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x + \pi)$.
2. Trovare, se esistono, gli zeri di tale funzione.

Esercizio 4. Risolvere in $[-\pi, +\pi)$ le seguenti equazioni

1. $\sin^2 x - \sin x = 0$
2. $\cos(2x - \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2} = 0$
3. $2\cos^2 x - 1 = 0$

Esercizio 5. Risolvere in $[0, 2\pi)$ le seguenti disequazioni

1. $\cos x > -\sin x$
2. $\tan x > \sqrt{3}$
3. $2\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$