Liceo Scientifico "L. Cremona" , Milano. Classe 3E. Marzo 2016.
Verifica di Matematica. Docente: Mauro Saita
Geometria analitica. Parabole.

Rispondere per iscritto ai seguenti quesiti sul foglio protocollo.[1]

Esercizio 1. Sia γ la parabola di equazione $y = -\dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{2}$ e vertice V. Detti A, B i punti di intersezione di γ con l'asse x, si trovi l'equazione della tangente t alla parabola in A (il punto A è quello di ascissa negativa).

Sia

r la retta parallela all'asse y passante per B;

P il punto di intersezione di t e r;

Q il punto di intersezione della retta AV e r.

Determinare l'area del triangolo APQ e dimostrare che tale area è la metà di quella del triangolo APB

Esercizio 2. Si consideri il fascio di parabole di equazione

$$y = (k+1)x^2 - 2kx - 3$$

con k parametro reale. Determinare la parabola del fascio

1. passante per $(1, 0)$;
2. con asse di simmetria $x = \frac{1}{2}$

Trovare, infine i due punti A, B per cui passano tutte le parabole del fascio.

Esercizio 3. Find the equations of the parabolas (with axis of symmetry parallel to the y-axis) having the point $F(0; 2)$ as focus and passing through the point $A(4; 5)$. Prove that the tangents to the parabolas at point A are perpendicular.

[1] File tex: verifica_04_parabola_2016_3e.tex

Soluzioni

Esercizio 1. Le intersezioni della parabola con l'asse x si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

Si ottiene: $A = (-3, 0)$ e $B = (2, 0)$. Il grafico della parabola è quello riportato in figura.

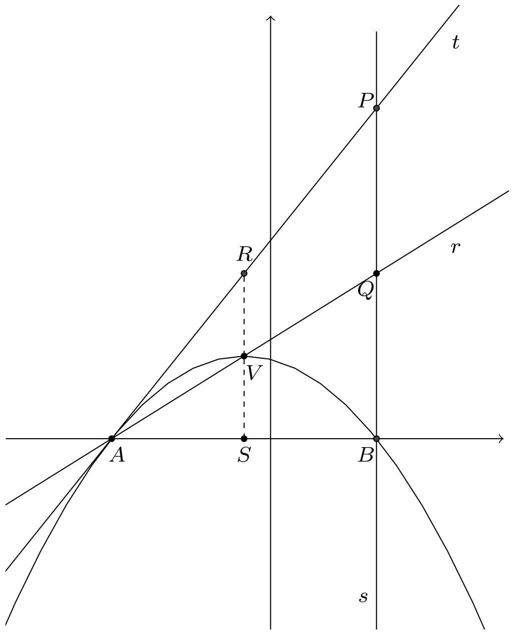

Figura 1

Se (x_0, y_0) è un punto della parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$, la pendenza m della retta tangente in (x_0, y_0) alla parabola è $m = 2ax_0 + b$. Quindi, la pendenza della retta t tangente in A alla parabola di equazione $y = -\dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{2}$ è

$$m = 2(-\frac{1}{4})(-3) - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

L'equazione di t è

$$y - 0 = \frac{5}{4}(x + 3)$$

ossia

$$y = \frac{5}{4}x + \frac{15}{4}$$

P è il punto di intersezione di t e s; esso si trova risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = \frac{5}{4}x + \frac{15}{4} \\ x = 2 \end{cases}$$

$P = (2, \frac{25}{4})$. Il punto Q è il punto di intersezione di r e s; le sue coordinate si trovano risolvendo il sistema formato dalle equazioni delle due rette. Si ricava: $Q = (2, \frac{25}{8})$. Infine il segmento PQ misura $\left|\frac{25}{4} - \frac{25}{8}\right| = \frac{25}{8}$ e l'area del triangolo APQ è

$$\texttt{Area}(APQ) = \frac{1}{2}\frac{25}{4}5 = \frac{125}{16}$$

Per dimostrare che l'area del triangolo APQ è la metà di quella di APB basta osservare che $RV = VS$; segue che la retta r è la mediana del triangolo APB, rispetto al lato PB.

Esercizio 2.

1. La parabola del fascio di equazione $y = (k+1)x^2 - 2kx - 3$ che contiene il punto $A = (1, 0)$ si trova sostituendo $x = 1$ e $y = 0$ nell'equazione del fascio; l'equazione (di primo grado) rispetto alla variabile k che così si ottiene è

$$k + 1 - 2k - 3 = 0$$

ossia

$$k = -2$$

2. L'equazione dell'asse di simmetria della parabola $y = ax^2 + bx + c$ è $x = -\frac{b}{2a}$. Ponendo $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$ si ottiene

$$\frac{2k}{2(k+1)} = \frac{1}{2}$$

ossia

$$k = 1$$

3. Il problema afferma che tutte le parabole del fascio hanno due punti in comune (i punti base del fascio). Quindi, per trovarli basta trovare i (due) punti di intersezione di due qualsiasi parabole del fascio. Per esempio per $k = -2$ e $k = 1$ si ottiene, nell'ordine, $y = -x^2 + 4x - 3$ e $y = 2x^2 - 2x - 3$. Mettendo a sistema le due equazioni si ottiene:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 3 \\ y = 2x^2 - 2x - 3 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema (con il metodo di sostituzione) si ricava:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 3 \\ y = 2x^2 - 2x - 3 \end{cases}, \begin{cases} y = -x^2 + 4x - 3 \\ 3x^2 - 6x = 0 \end{cases}$$

I punti comuni a tutte le parabole del fascio sono $(0, -3)$ e $(2, 1)$.

Esercizio 3.

Primo metodo.

Il problema chiede di trovare le equazioni delle (due) parabole con fuoco in $(0, 2)$ e passanti per $(4, 5)$. Innanzi tutto serve calcolare la distanza di A da F: $AF = \sqrt{16+9} = 5$;

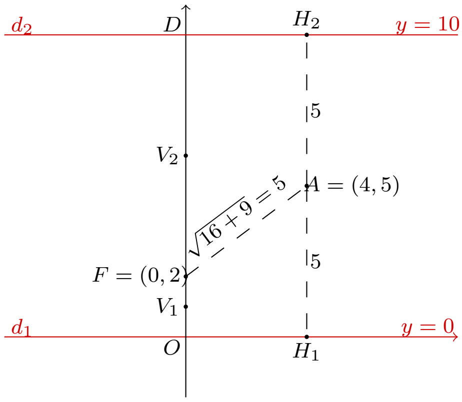

Figura 2

Poichè A è un punto delle parabole richieste le loro direttrici, diciamo d_1 e d_2, sono le rette, parallele all'asse x, che distano 5 da A (si ricordi la definizione di parabola)

$$d_1 : \quad y = 0 \qquad e \qquad d_2 : \quad y = 10 \tag{0.1}$$

mentre i vertici delle parabole sono i punti medi dei segmenti FO e FD, ossia

$$V_1 = (0, 1) \qquad e \qquad V_2 = (0, 6) \tag{0.2}$$

Allora le equazioni delle parabole si possono ottenere da

$$y = a(x - x_V)^2 + y_V$$

dove $a = \frac{1}{4\,FV_1} = \frac{1}{4}$ e $a = -\frac{1}{4\,FV_2} = -\frac{1}{16}$. Si ottiene:

$$y = \frac{1}{4}x^2 + 1 \qquad e \qquad y = -\frac{1}{16}x^2 + 6 \tag{0.3}$$

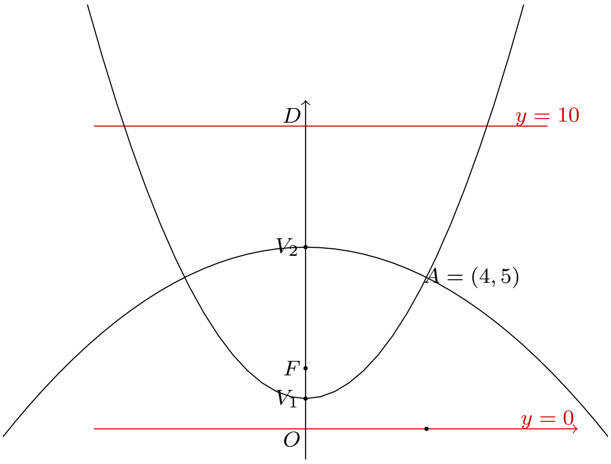

Figura 3: Grafici delle due parabole.

Secondo metodo.

Le direttrici delle due parabole si trovano come nel metodo precedente.

Per trovare le due equazioni richieste si poteva utilizzare direttamente la definizione di parabola: quella di fuoco F e direttrice d_1 è il luogo geometrico dei punti $P(x, y)$ del piano per i quali la distanza di P da F è uguale alla distanza di P da d_1 ovvero

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = |y|$$

Elevando al quadrato si ottiene

$$x^2 + (y-2)^2 = y^2$$

$$y = \frac{1}{4}x^2 + 1$$

Per l'equazione della seconda parabola si ottiene

$$y = -\frac{1}{16}x^2 + 6$$