Liceo Scientifico "L. Cremona" - Milano. Verifica di matematica. Circonferenze.		Classe: ______ Docente: M. Saita
Cognome:	Nome:	Dicembre 2016

Rispondere per iscritto ai seguenti quesiti sul foglio protocollo.[1]

Esercizio 1. Sia r la retta di equazione $x - y + 1 = 0$ e $A = (1, 2)$. Dopo aver verificato che $A \in r$, trovare l'equazione della circonferenza tangente in A a r e passante per $B = (3, 0)$.

Esercizio 2.

(a) Scrivere l'equazione della circonferenza γ passante per i punti $A = (-2, 0)$, $B(2, 0)$, $C = (1, 3)$.

(b) Indicato con P un punto di γ, trovare l'equazione che definisce il luogo geometrico del baricentro del triangolo ABP, al variare di P su γ.

Esercizio 3. Sia γ la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0$ e A il punto di γ di coordinate $(0 - 2)$.

(a) Trovare l'equazione della retta PQ, con P, Q vertici del triangolo equilatero APQ inscritto in γ.

(b) Calcolare l'area del triangolo APQ.

[1] File tex: verifica_03_circonferenza_2016.tex

Soluzioni

Esercizio 1. Una equazione per il fascio $\mathcal{F}$ di circonferenze tangenti in A alla retta r è

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + k(x-y+1) = 0$$

$B = (3,0) \in \mathcal{F} \quad \Leftrightarrow \quad (3-1)^2 + (0-2)^2 + k(3-0+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = -2.$
Una equazione della circonferenza richiesta è

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$$

Esercizio 2. Punto (a). Una equazione della circonferenza γ passante per A, B, C è

$$x^2 + (y-1)^2 - 5 = 0$$

Punto (b).

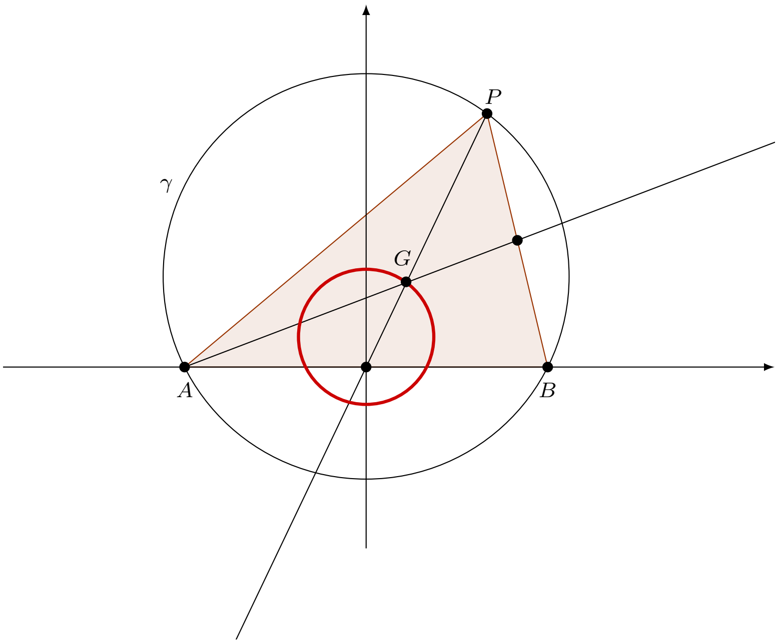

Figura 1: Il luogo geometrico descritto dal baricentro G è quello in rosso.

Un punto P qualsiasi che sta su γ ha coordinate:

$$P = (x, 1 \pm \sqrt{5 - x^2})$$

con $-\sqrt{5} \leq x \leq +\sqrt{5}$.
Le coordinate del baricentro G del triangolo ABP sono :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{x}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5 - x^2}}{3} \end{cases} \tag{0.1}$$

Sostituendo $x = 3x_G$ nella seconda uguaglianza del sistema si ottiene:

$$3y_G - 1 = \pm\sqrt{5 - 9x_G^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$(3y_G - 1)^2 = 5 - 9x_G^2$$

$$\Updownarrow$$

$$9x_G^2 + 9y_G^2 - 6y_G - 4 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x_G^2 + y_G^2 - \frac{2}{3}y_G - \frac{4}{9} = 0$$

Esercizio 3. Punto(a). Equazioni parametriche della retta r passante per $A = (0, -2)$ e $C = (-3, -1)$:

$$\begin{cases} x = & -3t \\ y = & -2 + t \end{cases} \tag{0.2}$$

con $t \in \mathbb{R}$.

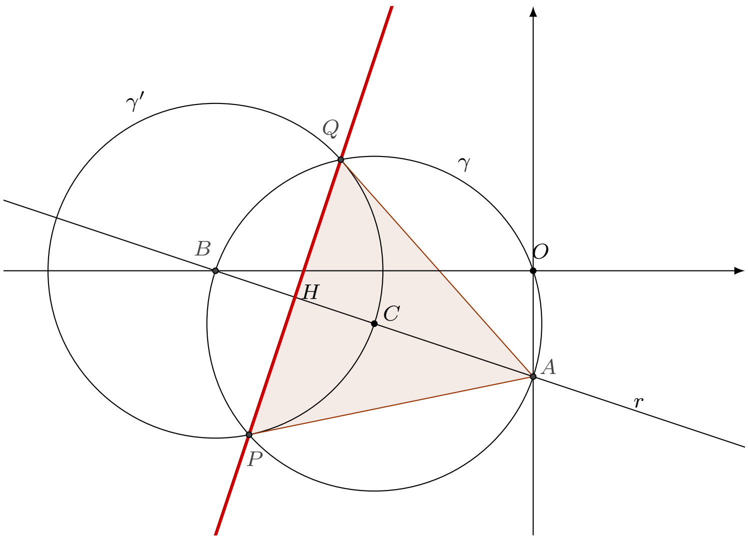

Figura 2: La retta PQ è l'asse radicale del fascio generato da γ e γ'.

Il punto $B = \gamma \cap r$ si trova sostituendo $x = -3t$, $y = -2 + t$ nell'equazione $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 10$ di γ:

$$(-3t + 3)^2 + (-2 + t + 1)^2 = 10$$

Con facili conti si ricava $t = 0 \;\vee\; t = 2$. In corrispondenza di $t = 0$ si trova il punto $A = (0, -2)$ (già noto) mentre per $t = 2$ si trova

$$B = (-6, 0)$$

L'equazione della circonferenza γ' di centro B e raggio $r = \sqrt{10}$ (stesso raggio di γ) è

$$(x + 6)^2 + y^2 = 10$$

ossia

$$x^2 + y^2 + 12x + 26 = 0$$

La retta PQ è l'asse radicale del fascio di circonferenze generato da γ e γ'. La sua equazione (cartesiana) si trova sottraendo l'equazione di γ da quella di γ'. Si ottiene:

$$3x - y + 13 = 0$$

che è l'equazione richiesta.

Punto (b). È immediato verificare che :

- $QC = \sqrt{10}$, $HC = \frac{\sqrt{10}}{2}$, $QH = \dfrac{\sqrt{10}}{2}\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{30}}{2}$ e $QP = \sqrt{30}$.
- $AH = \dfrac{3}{2}\sqrt{10}$.

Quindi

$$\texttt{Area triangolo APQ} = \frac{QP \cdot AH}{2} = \frac{3}{4}\sqrt{300} = \frac{15}{2}\sqrt{3}$$