LEZIONE 5

Prodotto vettore.

Indice degli argomenti

- Determinanti di ordine 2.
- Area del parallelogramma.
- Prodotto vettore.
- Proprietà del prodotto vettore.
- Determinante di ordine 3.
- Componenti cartesiane del prodotto vettore.
- Prodotto misto. Volume del parallelepipedo.

Determinanti di ordine 2

Definizione

Data una qualunque matrice 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

si chiama ***determinante*** *di* A *il numero*

$$\det A = a_1 b_2 - b_1 a_2$$

Esempio

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$*, allora il determinante di* A *è*

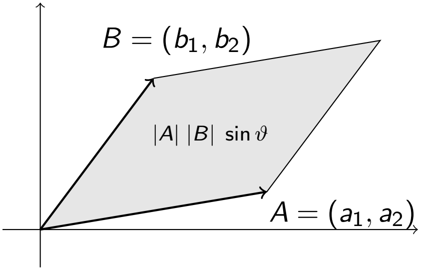
$$\det A = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

Area di un parallelogramma. Determinanti di ordine 2

L'area del parallelogramma individuato dai vettori $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ è

$$|A|\ |B|\ \sin\vartheta$$

dove ϑ, $0 \leq \vartheta \leq \pi$ è l'angolo tra i vettori A e B.



Area di un parallelogramma. Determinanti di ordine 2

Teorema

L'area del parallelogramma individuato da A e B è il valore assoluto di $\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$, *ossia*

$$|a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

Dimostrazione

$$
\begin{aligned}
|A|^2\,|B|^2\,\sin^2\vartheta &= |A|^2\,|B|^2\,(1-\cos^2\vartheta) \\
&= |A|^2\,|B|^2 - |A|^2\,|B|^2\cos^2\vartheta \\
&= |A|^2\,|B|^2 - (A\cdot B)^2 \\
&= (a_1^2+a_2^2)\,(b_1^2+b_2^2) - (a_1b_1+a_2b_2)^2 \\
&= (a_1b_2-a_2b_1)^2 \\
&= \left[\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}\right]^2
\end{aligned}
$$

Quindi, l'area del parallelogramma $Par(A,B)$ è $|a_1b_2-a_2b_1|$.
Q.E.D.

Prodotto vettore

Definizione

Data una coppia ordinata di vettori A, B il ***prodotto vettore*** $A \times B$ *(si legge: 'A vettore B') è il vettore così definito:*

1. *La lunghezza di $A \times B$ è uguale all'area del parallelogramma generato da A e B, vale a dire*

$$|A \times B| = |A|\,|B| \sin\vartheta$$

   dove ϑ, compreso tra 0 e 180°, è l'angolo tra i vettori A, B.

2. *La direzione di $A \times B$ è ortogonale sia al vettore A che al vettore B.*
3. *Il verso di $A \times B$ (quando $A \times B$ non è nullo) è quello stabilito dalla "regola della mano destra".*

Prodotto vettore

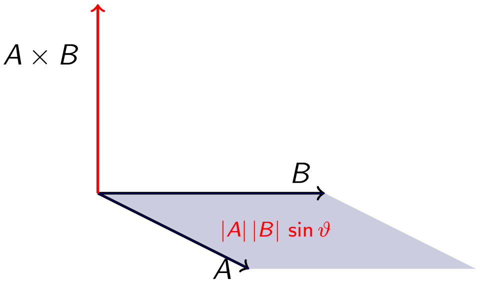


Figure: Il prodotto vettore $A \times B$.

Proprietà del prodotto vettoriale

Teorema

Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ ha le seguenti proprietà.

1. *Il prodotto vettoriale è bilineare:*

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2) \times B &= A_1 \times B + A_2 \times B \\ (h\,A) \times B &= h\,(A \times B) \qquad (h \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

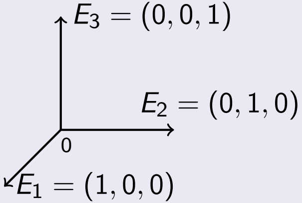
   e analogamente nel secondo argomento.

2. *Il prodotto vettoriale è alternante:*

$$B \times A = -A \times B$$

3. $A \times B = 0$ *se e solo se* A *e* B *sono paralleli.*

Esempi di prodotto vettore.



$$
\begin{aligned}
E_1 \times E_2 &= E_3 \\
E_2 \times E_3 &= E_1 \\
E_3 \times E_1 &= E_2 \\
E_2 \times E_1 &= -E_3 \\
E_3 \times E_2 &= -E_1 \\
E_1 \times E_3 &= -E_2
\end{aligned}
$$

Determinante del terzo ordine.

Definizione

Data una qualsiasi matrice 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

si chiama determinante di A *il numero*

$$\det A = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

Un modo semplice per calcolare il determinante di una matrice di ordine 3 consiste nell'utilizzare la regola di Laplace.

Regola di Laplace per il calcolo di un determinante

La regola di Laplace per sviluppare un determinante rispetto (ad esempio) alla prima riga, è la seguente:

$$\begin{aligned} &\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \\ = \quad & a_1 \det \begin{bmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} - a_2 \det \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{bmatrix} + a_3 \det \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Infatti, sviluppando il secondo membro si ottiene

$$a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

che è uguale al determinante di A.

Esempio

Calcolare il determinante di $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ utilizzando la regola di Laplace.

Soluzione. Regola di Laplace per sviluppare il determinante rispetto alla prima riga:

$$\begin{aligned} & \det \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix} \\ = \quad & 0 \cdot \det \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \det \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \\ = \quad & 0 \cdot (0 - 48) - 2 \cdot (0 - 42) + 3 \cdot (32 - 35) = 75 \end{aligned}$$

Esempio

Regola di Laplace per sviluppare il determinante rispetto alla seconda riga:

$$\begin{aligned}
&\det \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix} \\
= \quad & -4 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} + 5 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} - 6 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \\
= \quad & -4 \cdot (0 - 24) + 5 \cdot (0 - 21) - 6 \cdot (0 - 14) = 75
\end{aligned}$$

Regola di Laplace per sviluppare il determinante rispetto alla terza riga: (Esercizio)

Componenti del prodotto vettoriale

Teorema

Il prodotto vettoriale $A \times B$ *di due vettori* $A = (a_1, a_2, a_3)$ *e* $B = (b_1, b_2, b_3)$ *in* $\mathbb{R}^3$ *è il vettore di componenti:*

$$\begin{aligned} A \times B &= \left(\det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) \end{aligned}$$

Calcolo di $A \times B$ con il determinante formale

Un modo per calcolare $A \times B$ consiste nello sviluppare, lungo la prima riga, il determinante 'formale'

$$\det \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Infatti, lo sviluppo lungo la prima riga con la regola di Laplace dà:

$$\begin{aligned} & \det \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \\ = \quad & E_1 \det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix} - E_2 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix} + E_3 \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \\ = \quad & \left(\det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix}, - \det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Esercizio

Esercizio

Equazione cartesiana del piano π passante tre punti (distinti) P, Q, R.

Un vettore di giacitura del piano π è il prodotto vettore

$$(Q - P) \times (R - P) \tag{2}$$

Se $(Q - P) \times (R - P) = (a, b, c)$ e $P = (x_0, y_0, z_0)$, una equazione cartesiana di π è

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) \tag{3}$$

Il prodotto misto $A \times B \cdot C$

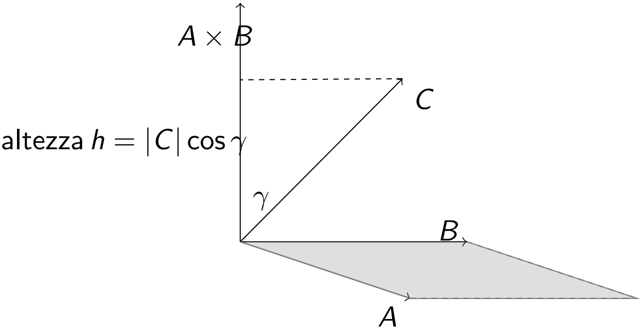


Figure: Il valore assoluto del prodotto misto $A \times B \cdot C$ è $|A \times B|\,|C|\,|\cos\gamma|$. Esso è il volume del parallelepipedo definito dagli spigoli A, B, C. Infatti, $|A \times B|$ è l'area di base, e (il valore assoluto di) $|C| \cos\gamma$ è l'altezza.

Conseguenza: Tre vettori sono complanari (linearmente dipendenti) se e solo se il prodotto misto $A \times B \cdot C$ è nullo.

Calcolo del prodotto misto. Il determinante del terzo ordine.

Il prodotto misto, ossia il volume con segno del parallelepipedo, è:

$$\begin{aligned}(A \times B) \cdot C &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)c_3 \\ &= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1 \\ &= \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Questo numero è il determinante (di una matrice 3×3).
Si noti che:

$$(A \times B) \cdot C = (B \times C) \cdot A = (C \times A) \cdot B =$$

$$= -(B \times A) \cdot C = -(A \times C) \cdot B = -(C \times B) \cdot A$$

Proprietà del determinante

Teorema (Proprietà del determinante)

Per il determinante di una qualunque matrice quadrata (2×2, 3×3, *in generale* $n \times n$)*, valgono le seguenti proprietà.*

1. *Se si somma a una riga un multiplo di un'altra riga, il determinante non cambia. (*Proprietà di invarianza per scorrimento*).*
2. *Se si moltiplica una riga per un numero* λ*, anche il determinante risulta moltiplicato per* λ*.*
3. *Se si scambiano tra loro due righe, il determinante cambia segno (*Proprietà di alternanza*).*

Valgono anche le seguenti due proprietà, che seguono facilmente da quelle elencate sopra:
Se due righe sono uguali, il determinante è nullo;
Se una riga è costituita tutta da zeri, allora il determinante è nullo.