LEZIONE 4

Rette e piani nello spazio.

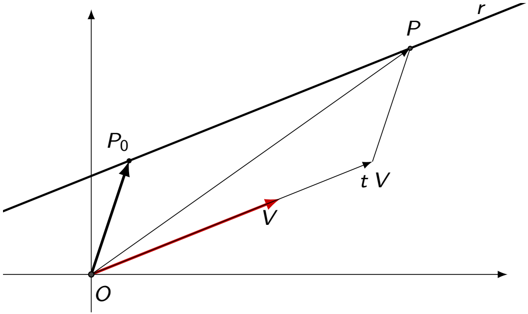
Indice degli argomenti

Sistema di coordinate cartesiane ortogonali nell spazio.

Fissare un sistema di coordinate cartesiane ortogonali nello spazio significa scegliere

1. Un punto origine O;
2. Una Terna di vettori E_1, E_2, E_3, spiccati da O, ortogonali e di lunghezza unitaria.
   Fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, lo spazio si può "identificare" con $\mathbb{R}^3$.
   Quindi, se è conveniente introdurre le coordinate cartesiane (non sempre lo è), parleremo brevemente, di: *rette e piani in* $\mathbb{R}^3$.

Retta passante per il punto P_0 e parallela a V.



Equazioni parametriche di una retta.

Retta passante per il punto P_0 e parallela al vettore V

- Equazione parametrica di una retta r in forma vettoriale:

$$P = P_0 + tV \qquad t \in \mathbb{R}$$

- Equazioni parametriche di una retta r in coordinate, posto $P = (x, y, z)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $V = (l, m, n)$:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Piano passante per un punto e ortogonale a un vettore

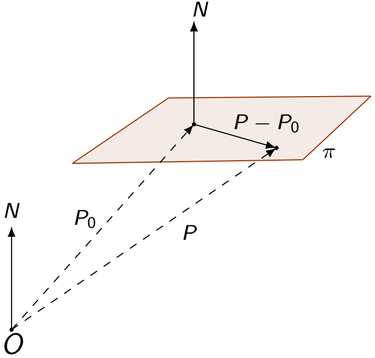


Figure: Un punto P appartiene al piano π passante per il punto P_0 e ortogonale al vettore N se, e solo se, il vettore $P - P_0$ è ortogonale a N.

Piano passante per un punto e ortogonale a un vettore

Equazione vettoriale del piano passante per un punto e ortogonale a un vettore

Un punto P appartiene al piano π passante per il punto P_0 e ortogonale al vettore **n** se, e solo se, $P - P_0$ è ortogonale a N.

- L'equazione vettoriale di π è:

$$N \cdot (P - P_0) = 0$$

- Posto:

$$N = (a, b, c), \quad P = (x, y, z), \quad P_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

  si ottiene l'equazione cartesiana:

$$a(x - x_0) + b(y - y_o) + c(z - z_0) = 0$$

Esempi.

Esempio (Piano passante per un punto e ortogonale a un vettore.)

Equazione cartesiana del piano passante per $(1,0,2)$ *e ortogonale a* $(1,1,1)$*:*

$$1(x-1)+1(y-0)+1(z-2)=0, \quad \textit{ossia} \quad x+y+z-3=0$$

Esempio (Retta passante per un punto e ortogonale a un piano.)

Equazioni parametriche della retta passante per $(3,-2,-1)$ *e ortogonale al piano* $x+y+2z=0$ *sono:*

$$\begin{cases} x = & 3+t \\ y = & -2+t \quad\quad t \in \mathbb{R} \\ z = & -1+2t \end{cases}$$

Equazione cartesiana di un piano nello spazio

Teorema (Equazione cartesiana di un piano nello spazio)

Ogni piano nello spazio $\mathbb{R}^3$ *si rappresenta con un'equazione cartesiana*

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{1}$$

dove almeno uno dei coefficienti a, b, c *non è nullo. Viceversa, ogni equazione di questo tipo rappresenta un piano.*
Il vettore $N = (a, b, c)$ *è ortogonale al piano di equazione* $ax + by + cz + d = 0$ *e si chiama vettore di direzione (o anche vettore di giacitura) del piano.*

Equazioni cartesiane di una retta nello spazio

Equazioni cartesiane di una retta

Equazioni cartesiane di una retta r nello spazio $\mathbb{R}^3$ sono:

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \tag{2}$$

dove $ax + by + cz + d = 0$ e $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sono equazioni di due piani qualunque, la cui intersezione sia la retta r.

Parallelismo e ortogonalità tra rette

Due rette r e r' di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x = x_0' + l't \\ y = y_0' + m't \\ z = z_0' + n't \end{cases}$$

- sono parallele se hanno la stessa direzione, cioè i loro vettori di direzione (l, m, n) e (l', m', n') sono proporzionali:

$$\exists h \in \mathbb{R} \qquad l' = hl, \quad m' = hm, \quad n' = hn$$

- sono ortogonali tra loro se i loro vettori di direzione (l, m, n) e (l', m', n') sono ortogonali:

$$(l, m, n) \cdot (l', m', n') = l\,l' + m\,m' + n\,n' = 0$$

Parallelismo e ortogonalità tra piani

Due piani

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

- sono paralleli se hanno la stessa giacitura, cioè se i loro vettori di giacitura (a, b, c) e (a', b', c') sono proporzionali:

$$\exists h \in \mathbb{R} \qquad a' = ha, \quad b' = hb, \quad c' = hc$$

- sono ortogonali tra loro se i loro vettori di giacitura (a, b, c) e (a', b', c') sono ortogonali:

$$(a, b, c) \cdot (a', b', c') = a\,a' + b\,b' + c\,c' = 0$$

Parallelismo e ortogonalità retta - piano.

Parallelismo retta/piano

Un piano $ax + by + cz + d = 0$ e una retta $r : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$

- sono paralleli tra loro se il vettore (a, b, c) è ortogonale al vettore (l, m, n):

$$(a, b, c) \cdot (l, m, n) = a\,l + b\,m + c\,n = 0$$

- sono ortogonali tra loro se (a, b, c) e (l, m, n) sono paralleli:

$$\exists h \in \mathbb{R} \qquad (a, b, c) = h\,(l, m, n) \tag{3}$$

Fascio di piani

Teorema

Sia r una retta dello spazio tridimensionale, di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \tag{4}$$

I piani del fascio di sostegno r sono esattamente quelli la cui equazione è del tipo:

$$\lambda\,(ax + by + cz + d) + \mu\,(a'x + b'y + c'z + d') = 0 \tag{5}$$

dove λ e μ sono numeri arbitrari (non entrambi nulli).

Esercizio sui fasci di piani

Esercizio

Scrivere un'equazione cartesiana per il piano che passa per il punto $P = (0,1,1)$ *e include la retta* r *di equazioni cartesiane*

$$r : \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + 8z - 1 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

L'equazione del fascio di sostegno r è

$$\lambda(x - y) + \mu(x + y + 8z - 1) = 0, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$(\lambda, \mu) \neq (0,0)$. Il passaggio per $P = (0,1,1)$ impone

$$\lambda(0 - 1) + \mu(0 + 1 + 8 - 1) = 0, \quad \text{ossia} \quad -\lambda + 8\mu = 0$$

le cui soluzioni sono tutti i multipli della coppia ordinata $\lambda = 8$, $\mu = 1$. Un'equazione del piano cercato è

$$8(x - y) + 1(x + y + 8z - 1) = 0 \quad \text{ossia} \quad 9x - 7y + 8z - 1 = 0$$