LEZIONE 1

Metodo delle coordinate

Prodotto scalare

Proiezione di un vettore lungo un altro

Sistema di coordinate cartesiane ortogonali nel piano.

Fissare un sistema di coordinate cartesiane ortogonali nel piano significa scegliere

1. un punto origine O;
2. una coppia di vettori E_1, E_2, spiccati da O, ortogonali e di lunghezza unitaria.

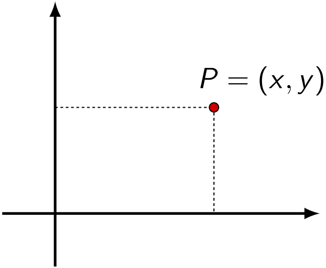
Fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, il piano si può "identificare" con $\mathbb{R}^2$.

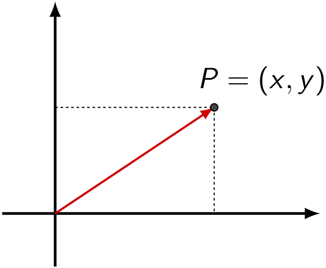
Interpretazione geometrica di (x, y)

In $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, la coppia ordinata di numeri reali (x, y) ha due importanti interpretazioni geometriche:

- il punto
- il vettore spiccato dall'origine

L'interpretazione più corretta è suggerita dal contesto.





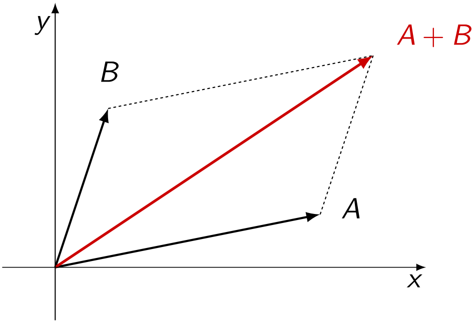
Somma di due vettori.

Definizione

Siano $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ *e* k *un numero reale. Si chiama* *somma* *di* A *e* B *il vettore*

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

Il vettore somma $A + B$ è quello che si ottiene con la "regola del parellelogramma".



Principali proprietà della somma di vettori

1. La somma è commutativa: per ogni V, W in $\mathbb{R}^2$
$$V + W = W + V$$

2. La somma è associativa: per ogni U, V, W in $\mathbb{R}^2$
$$(U + V) + W = U + (V + W)$$

3. Esiste un vettore in $\mathbb{R}^2$, il vettore nullo 0, che è elemento neutro rispetto all'operazione di somma, nel senso che
$$V + 0 = V$$
per ogni vettore V.

4. Per ogni vettore $V \in \mathbb{R}^2$ esiste un vettore, l'opposto di V, denotato $-V$, che sommato a V dà il vettore nullo:
$$V + (-V) = 0.$$

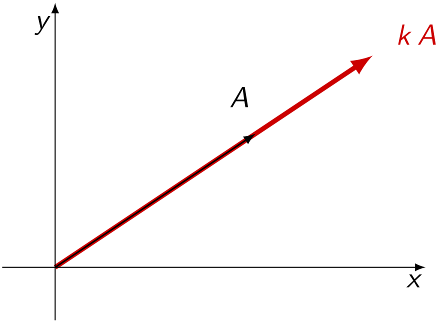
Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

Definizione

Sia $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ *e* k *un numero reale. Si chiama* *moltiplicazione del vettore* A *per il numero* k *il vettore*

$$kA = (ka_1, ka_2)$$

Moltiplicare un vettore A per uno scalare k significa "dilatare"("contrarre ") del fattore k, il vettore A.



Principali proprietà della moltiplicazione di un vettore per uno scalare.

Per ogni V, W in $\mathbb{R}^2$ e per ogni $h, k \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti proprietà

1. $h(kV) = (hk)V$
2. (h $+$k)V$=$h V $+$k V
3. $h(V + W) = hV + hW$
4. $1V = V$

Lunghezza di un vettore. Distanza tra due punti

1. La lunghezza di $A = (a_1, a_2)$ è il numero

$$|A| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

2. La distanza di $A = (a_1, a_2)$ da $B = (b_1, b_2)$ è il numero

$$|B - A| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Punto medio

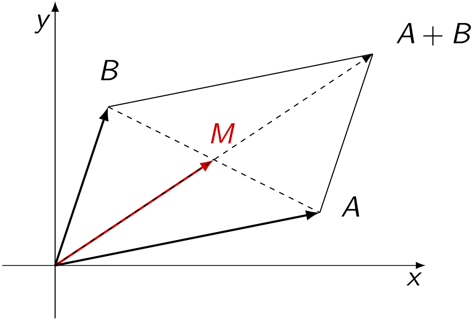
Se $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ allora il punto medio del segmento $\overline{AB}$ è

$$M = \frac{1}{2}(A + B)$$

Posto $M = (m_1, m_2)$ si ottiene:

$$\begin{cases} m_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2} \\ m_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2} \end{cases}$$

Punto medio



Le diagonali di un parallelogramma si intersecano vicendevolmente nel punto medio; quindi il vettore M è la metà di $A + B$

Prodotto scalare. Vettori ortogonali

Il prodotto scalare di A e B è il numero

$$A \cdot B = |A|\,|B| \cos\theta$$

dove $\cos\theta$ è l'angolo (convesso) formato da A e B.

Due vettori $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ si dicono ortogonali se

$$A \cdot B = 0$$

Proprietà del prodotto scalare

1. Il prodotto scalare è simmetrico
$$A \cdot B = B \cdot A$$
2. Il prodotto scalare è omogeneo
$$(kA) \cdot B = k(A \cdot B)$$
3. Il prodotto scalare è additivo
$$(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$$
$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$
4. Il prodotto scalare è positivo
$$A \cdot A = |A|^2 > 0 \quad \text{se} A \neq 0$$

Il prodotto scalare in coordinate cartesiane ortogonali

Teorema

Se $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ *allora*

$$A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Dimostrazione (facoltativa).

Siano $E_1 = (1, 0)$ e $E_2 = (0, 1)$

$$\begin{aligned} A \cdot B = & \quad (a_1 E_1 + a_2 E_2) \cdot (b_1 E_1 + b_2 E_2) \\ = & \quad a_1 b_1 \underbrace{(E_1 \cdot E_1)}_{=1} + a_1 b_2 \underbrace{(E_1 \cdot E_2)}_{=0} + a_2 b_1 \underbrace{(E_2 \cdot E_1)}_{=0} + a_2 b_2 \underbrace{(E_2 \cdot E_2)}_{=1} \\ = & \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 \qquad Q.E.D. \end{aligned}$$

Proiezione di un vettore lungo un altro

Definizione

Siano $A = (a_1, a_2)$ *e* $B = (b_1, b_2)$ *(*$B \neq 0$*). Si chiama proiezione di A lungo (la retta di) B il vettore*

$$P_B(A) = \frac{A \cdot B}{B \cdot B}\, B$$

In particolare se $|U| = 1$

$$P_U(A) = (A \cdot U)\, B$$