LEZIONE 1

Funzioni reali di variabile reale

Definizione (Funzione reale di variabile reale)

Una funzione f da A in B ($A \xrightarrow{f} B$) consiste di:

1. *un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ detto dominio della funzione;*
2. *un sottoinsieme B di $\mathbb{R}$ detto codominio della funzione;*
3. *una regola o azione f che assegna ad ogni elemento a del dominio un unico elemento b del codominio.*

L'elemento b si chiama immagine di a tramite f e si indica con il simbolo $f(a)$ (si legge: "f di a").

Definizione (Immagine di una funzione)

Si chiama immagine $Im\, f$ *della funzione* $A \xrightarrow{f} B$ *il sottoinsieme del codominio*

$$Im\, f = \{y \in B \mid \exists x \in A \;\; f(x) = y\}$$

Definizione (Controimmagine)

Sia b *un elemento del codominio della funzione* $A \xrightarrow{f} B$. *Si chiama* ***controimmagine di*** b ***mediante*** f *(e si scrive "*$f^{-1}(b)$*") il sottoinsieme di* A *così definito*

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$$

L'insieme $f^{-1}(b)$ si chiama anche **fibra di f sull'elemento b**. Esso può essere formato da uno o più elementi oppure coincidere con l'insieme vuoto.

Definizione (Grafico di una funzione)

Sia $A \xrightarrow{f} B$ *una funzione. Il grafico* G_f *di* f *è il sottoinsieme del prodotto cartesiano* $A \times B$

$$G_f = \{(a, b) \in A \times B \ | \ b = f(a)\}$$

Definizione (Zeri di una funzione)

Gli zeri della funzione

$$A \xrightarrow{f} B, \; y = f(x)$$

$(A, B \subseteq \mathbb{R})$ *sono gli elementi* $x \in A$ *per i quali risulta*

$$f(x) = 0$$

Gli zeri di f sono le ascisse dei punti di intersezione del grafico G_f di f con l'asse x.

Definizione (Funzione pari)

La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $y = f(x)$ *è pari se vale la proprietà*

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(-x) = f(x)$$

Se f è pari il grafico G_f di f è simmetrico rispetto alla retta $x = 0$ (asse y).

Definizione (Funzione dispari)

La funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $y = f(x)$ *è dispari se vale la proprietà*

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(-x) = -f(x)$$

Se f è dispari il grafico G_f di f è simmetrico rispetto all'origine O degli assi cartesiani.

Teorema

Siano $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *e* $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ *due funzioni reali di variabile reale allora*

1. *Se* f *e* g *sono pari allora* fg *è pari*
2. *Se* f *e* g *sono dispari allora* fg *è pari*
3. *Se* f *è pari e* g *è dispari allora* fg *è dispari*

Attenzione: la funzione $h = fg$ indica il prodotto puntuale di funzioni e non la loro composizione.

ESERCIZI

1. Determinare il dominio massimale D in $\mathbb{R}$ di

$$f(x) = \sqrt{\frac{9 - x^2}{x^2 - 5x + 4}}$$

2. Determinare il dominio massimale D in $\mathbb{R}$ di

$$f(x) = \sqrt[3]{-3x^3 + 2x}$$

   . La funzione $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è pari? è dispari?

3. Determinare il dominio massimale in $\mathbb{R}$ della funzione

$$D \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = \frac{3x^2 - 13x + 4}{4x^2 - 9}$$

   Per quali valori di x la funzione del punto precedente risulta positiva o nulla?

4. Tracciare il grafico qualitativo di $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x^2$. f è pari? è dispari? Per quali valori del dominio la funzione è negativa? Determinare l'insieme delle controimmagini di -8, cioè determinare l'insieme $f^{-1}(-8)$.

5. Tracciare il grafico qualitativo di
$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = |1 - x^2|$$
Determinare gli zeri di f.

6. Tracciare il grafico qualitativo di
$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{|x|}$$
La funzione è f pari? è dispari?

7 Determinare gli zeri della funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,

$$f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 22x - 12$$

8 Tracciare il grafico qualitativo della funzione

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 5|x| + 6$$

Per quali valori del dominio la funzione è positiva?
Determinare $f^{-1}(6)$.

9 La funzione

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \qquad f(x) = -3x^6 + 7x^4 - 2$$

è pari? È dispari

10 È data la funzione

$$D \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt{2x^2 - x} - x + 1$$

(D indica il dominio massimale in $\mathbb{R}$ della funzione).
Determinare per quali valori $x \in D$ la funzione risulta positiva.