

RETTE E PIANI IN \mathbb{R}^3

Mauro Saita
e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Indice

1	Equazioni parametriche della retta	2
1.1	Esempi	3
2	Equazione cartesiana del piano	4
2.1	Esempi	5
2.2	Condizioni di parallelismo e ortogonalità . I casi: retta-retta, piano-piano, retta-piano	5
2.3	Esempi.	7
3	Equazioni cartesiane di rette e equazioni parametriche di piani	9
3.1	Esempi	9

¹Nome file: rette_e_piani_2023.tex

1 Equazioni parametriche della retta

Una *retta parametrizzata* nello spazio \mathbb{R}^3 è una funzione

$$\mathbb{R} \xrightarrow{r} \mathbb{R}^3 \quad t \longmapsto (x_0 + lt, y_0 + mt, z_0 + nt)$$

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ è un punto della retta (corrispondente al valore del parametro $t = 0$) e $\mathbf{v} = (l, m, n)$ è un vettore non nullo *parallelo* alla retta, detto *vettore di direzione* della retta. Si scrive anche

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

Le uguaglianze (1.1) sono le *equazioni parametriche* per la retta r . In forma vettoriale si scrive

$$X = P_0 + t\mathbf{v} \quad t \in \mathbb{R}$$

dove $X = (x, y, z)$.

In linea di principio, è bene distinguere la *funzione* $\mathbb{R} \xrightarrow{r} \mathbb{R}^3$ dalla sua *immagine*, cioè dall'insieme di punti di \mathbb{R}^3 per i quali $\mathbf{r}(t) = P_0 + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$. Distinguere i due concetti è importante ad esempio in cinematica: la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{r} \mathbb{R}^3$ è la legge oraria di un moto rettilineo uniforme che all'istante $t = 0$ passa per P_0 e possiede velocità (vettoriale) \mathbf{v} costante al variare di t . L'immagine di \mathbf{r} è

$$\text{Im}(\mathbf{r}) = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid P = P_0 + vt, t \in \mathbb{R}\}$$

e fornisce la traiettoria (orbita) del moto. Naturalmente, una stessa traiettoria può essere percorsa in infiniti modi diversi. In termini geometrici, una retta intesa come insieme di punti dello spazio, può essere parametrizzata in infiniti modi diversi.

Considerazioni del tutto analoghe valgono, con ovvie modifiche, per le rette parametrizzate in \mathbb{R}^2 . Le equazioni parametriche di tali rette sono del tipo

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases} \quad (1.2)$$

dove $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} = (l, m)$ è un vettore di direzione della retta e (x_0, y_0) è un punto della retta.

1.1 Esempi

1. Le equazioni parametriche della retta passante per $P_0 = (3, 5, 7)$ e avente vettore di direzione $v = (1, 2, -1)$ sono:

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 + 2t \\ z = 7 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

2. Le equazioni parametriche dell'asse x sono:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

3. L'equazione parametrica in forma vettoriale della retta contenente i punti (distinti) A e B è :

$$X = A + (B - A)t, \quad t \in \mathbb{R}$$

In componenti, se $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ e $X = (x, y, z)$ si ha:

$$\begin{cases} x = a_1 + (b_1 - a_1)t \\ y = a_2 + (b_2 - a_2)t \\ z = a_3 + (b_3 - a_3)t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

4. Le due rette di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + 3t \\ z = -1 + 7t \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = -2u \\ y = -6u \\ z = 5 - 14u \end{cases}$$

$t, u \in \mathbb{R}$, sono parallele perché i loro rispettivi vettori di direzione $\mathbf{v} = (1, 3, 7)$ e $\mathbf{v}' = (-2, -6, -14)$ sono proporzionali.

2 Equazione cartesiana del piano

In \mathbb{R}^3 si consideri un piano π , un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ appartenente a π e un vettore non nullo $\mathbf{v} = (a, b, c)$ ortogonale a π . Allora $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ appartiene a π se e solo se il vettore $X - P_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ è ortogonale a $\mathbf{v} = (a, b, c)$, cioè se e solo se il prodotto scalare $v \cdot (X - P_0)$ è nullo:

$$\begin{aligned} (x, y, z) \text{ appartiene a } \pi & \\ \Updownarrow & \\ v \cdot (X - P_0) = 0 & \\ \Updownarrow & \\ a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 & \end{aligned}$$

Diremo allora che l'*equazione cartesiana* del piano passante per $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e ortogonale al vettore $\mathbf{v} = (a, b, c)$ è

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad (2.1)$$

Eliminando le parentesi, l'equazione (2.1) si scrive nella forma:

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (2.2)$$

Si tratta di una equazione di primo grado in x, y, z , con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Naturalmente ogni altra equazione del tipo

$$(\lambda a)x + (\lambda b)y + (\lambda c)z + (\lambda d) = 0,$$

per ogni $\lambda \neq 0$, rappresenta ancora lo stesso piano π .

Viceversa, ogni equazione del tipo (2.2), con a, b, c non tutti e tre nulli, rappresenta un piano; supposto ad esempio $c \neq 0$, l'equazione (2.2) rappresenta il piano ortogonale a (a, b, c) , passante per $(0, 0, -\frac{d}{c})$ (Esercizio). Il piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ contiene l'origine se e solo se $d = 0$.

Riassumendo: si consideri una funzione $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = ax + by + cz + d$, con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Una tale funzione si dice *affine*. Allora l'*insieme degli zeri* di f , denotato $f^{-1}(0)$, cioè l'insieme

$$f^{-1}(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = ax + by + cz + d = 0\}$$

è un piano in \mathbb{R}^3 ; si dice che $ax + by + cz + d = 0$ è una equazione cartesiana del piano. Attenzione: qui si usa la notazione $f^{-1}(0)$ per denotare la controimmagine di 0 (zero) tramite f , cioè l'insieme dei punti (x, y, z) dello spazio per i quali $f(x, y, z) = 0$; il simbolo usato non denota la funzione inversa di f (che non è mai invertibile).

2.1 Esempi

1. Il piano passante per il punto $P_0 = (2, 1, 7)$ e ortogonale al vettore $\mathbf{v} = (3, 2, 5)$ ha equazione

$$3(x - 2) + 2(y - 1) + 5(z - 7) = 0$$

ossia $3x + 2y + 5z - 43 = 0$.

2. Il piano passante per l'origine e ortogonale a $(1, 1, 1)$ ha equazione: $x + y + z = 0$.
3. Il piano yz ha equazione $x = 0$.
4. Il piano passante per il punto $P_0 = (0, 0, 5)$ e ortogonale a $(0, 0, 1)$ (cioè parallelo al piano xy) è $z - 5 = 0$.

2.2 Condizioni di parallelismo e ortogonalità . I casi: retta-retta, piano-piano, retta-piano

Rette parallele.

Siano r e r' due rette in \mathbb{R}^3 , rispettivamente con vettori di direzione \mathbf{v} e \mathbf{v}' . La retta r è *parallela* a r' se \mathbf{v} è multiplo di \mathbf{v}' , cioè se esiste un numero $h \neq 0$ per il quale $\mathbf{v} = h\mathbf{v}'$. In modo equivalente, due rette r e r' sono parallele, se: 1) sono complanari (cioè esiste un piano che le contiene entrambe); 2) o sono coincidenti, oppure non hanno punti in comune.

Due rette r e r' di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad r' : \begin{cases} x = x'_0 + l't \\ y = y'_0 + m't \\ z = z'_0 + n't \end{cases} \quad (2.3)$$

sono parallele se e solo se i loro vettori di direzione (a, b, c) e (a', b', c') sono proporzionali, cioè se esiste un numero λ per il quale

$$a' = \lambda a, \quad b' = \lambda b, \quad c' = \lambda c$$

Rette ortogonali. Due rette r e r' di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad r' : \begin{cases} x = x'_0 + l't \\ y = y'_0 + m't \\ z = z'_0 + n't \end{cases} \quad (2.4)$$

sono ortogonali se e solo se i loro vettori di direzione (l, m, n) e (l', m', n') sono ortogonali, cioè se e solo se

$$ll' + mm' + nn' = 0$$

Piani paralleli.

Due piani π e π' di equazioni cartesiane

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

sono paralleli se e solo se i vettori (a, b, c) , (a', b', c') (ortogonali a π e π' , rispettivamente) appartengono alla stessa retta, cioè se e solo se esiste un numero λ per il quale

$$a' = \lambda a, \quad b' = \lambda b, \quad c' = \lambda c$$

Se tale condizione è verificata e inoltre $d' = \lambda d$, allora π e π' sono (paralleli e) coincidenti; se invece $d' \neq \lambda d$, sono paralleli distinti.

Piani ortogonali.

Due piani π e π' rispettivamente di equazioni cartesiane

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

sono ortogonali se e solo se i vettori (a, b, c) , (a', b', c') sono ortogonali, cioè se e solo se

$$aa' + bb' + cc' = 0$$

Ortogonalità piano-retta. Un piano

$$\pi : \quad ax + by + cz + d = 0$$

e una retta

$$r : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad (2.5)$$

sono ortogonali tra loro se e solo se il vettore (a, b, c) , ortogonale a π , e il vettore di direzione (l, m, n) della retta r sono multipli, cioè se e solo se esiste un numero ρ per il quale

$$a = \rho l, \quad b = \rho m, \quad c = \rho n$$

Parallelismo piano-retta. Un piano

$$\pi : \quad ax + by + cz + d = 0$$

e una retta

$$r : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad (2.6)$$

sono paralleli tra loro se e solo se il vettore (a, b, c) , ortogonale a π , e il vettore di direzione (l, m, n) della retta r sono ortogonali, cioè se e solo se

$$al + bm + cn = 0$$

Mutua posizione di due rette in \mathbb{R}^3 . Due rette r e r' in \mathbb{R}^3 si dicono *parallele* se hanno la stessa direzione, cioè se i loro vettori di direzione sono multipli tra loro

sghembe se non sono complanari, cioè se non esiste un piano che le contiene entrambe.

incidenti se la loro intersezione $r \cap r'$ è un punto (cioè se hanno esattamente un punto in comune).

Riassumendo: se due rette nello spazio hanno la stessa direzione, sono parallele; se invece non hanno la stessa direzione, ci sono due casi possibili: sono incidenti se la loro intersezione è un punto, sono sghembe se la loro intersezione è vuota.

2.3 Esempi.

1. Le due rette

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 7 + 2t \\ z = -t \end{cases} \quad r' : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 - 4t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad (2.7)$$

sono parallele. Infatti i loro vettori di direzione, rispettivamente $\mathbf{v} = (1, 2, -1)$ e $\mathbf{v}' = (-2, -4, 2)$, sono proporzionali ($\mathbf{v}' = -2\mathbf{v}$).

2. I due piani

$$\pi : \quad x + y - z + 7 = 0, \quad \pi' : \quad 2x + 2y - 2z + 3 = 0$$

sono paralleli e distinti. Sono paralleli, perché i vettori $(a, b, c) = (1, 1, -1)$ e $(a', b', c') = (2, 2, -2)$, rispettivamente ortogonali a π e π' , sono proporzionali tra loro: $(a', b', c') = 2(a, b, c)$; sono paralleli *distinti*, perché $(1, 1, -1, 7)$ e $(2, 2, -2, 3)$ non sono proporzionali.

3. I due piani

$$\pi : x + 2y + 4z + 1 = 0, \quad \pi' : 2x + 3y - 2z + 7 = 0$$

sono ortogonali. Infatti i vettori $(a, b, c) = (1, 2, 4)$ e $(a', b', c') = (2, 3, -2)$ sono ortogonali tra loro (il loro prodotto scalare è zero).

4. Il piano

$$\pi : x + y + 3z + 1 = 0$$

e la retta

$$r : \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{3}t \\ y = \frac{1}{3}t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad (2.8)$$

sono ortogonali tra loro perché il vettore $(a, b, c) = (1, 1, 3)$, ortogonale a π , è multiplo del vettore di direzione $(l, m, n) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)$ della retta r .

3 Equazioni cartesiane di rette e equazioni parametriche di piani

Siano π e π' due piani nello spazio, di equazioni $ax + by + cz + d = 0$ e $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, rispettivamente. Se non sono paralleli tra loro, la loro intersezione $\pi \cap \pi' = r$ è una retta dello spazio; un punto (x, y, z) dello spazio appartiene a r se e solo se soddisfa il sistema

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Si dice che (3.1) è una rappresentazione della retta r mediante (un sistema di) equazioni cartesiane. Naturalmente, esistono infinite coppie di piani la cui intersezione è r ; quindi una stessa retta si può rappresentare come sistema di equazioni cartesiane in infiniti modi diversi.

Un piano π nello spazio può anche essere descritto in forma parametrica, nel modo seguente. Siano $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$ due vettori (spiccati dall'origine) paralleli a π e sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto di π . Allora il piano π è l'insieme dei punti $X = (x, y, z)$ del tipo

$$X = P_0 + tV + uW$$

al variare dei parametri t, u in \mathbb{R} . Infatti, l'insieme di punti $\{tV + uW, t, u \in \mathbb{R}\}$ è il piano π_0 passante per l'origine e parallelo a π ; se si trasla tale piano π_0 del vettore OP_0 , si ottiene il piano π .

In componenti, le equazioni parametriche del piano π si scrivono

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + v_1t + w_1u \\ y = y_0 + v_2t + w_2u \\ z = z_0 + v_3t + w_3u \end{cases} \quad t, u \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

3.1 Esempi

1. L'asse delle x è intersezione del piano di equazione $z = 0$ (il piano xy) e del piano di equazione $y = 0$ (il piano xz). Quindi equazioni cartesiane per l'asse delle x sono

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

2. La retta di \mathbb{R}^3 , bisettrice del primo e terzo quadrante del piano xy , ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

3. Equazioni parametriche per il piano passante per $P_0 = (1, 2, 5)$ e parallelo ai vettori $v = (2, 5, 7)$ e $w = (1, 0, 3)$ sono:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t + u \\ y = 2 + 5t \\ z = 5 + 7t + 3u \end{cases} \quad t, u \in \mathbb{R}$$