Note di geometria analitica nel piano

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria. Novembre 2015.[1]

Indice

[1]Nome File: Geometria_2015.tex

1 Punti e vettori spiccati dall'origine

1.1 Coordinate.

Sia $A = (x_1, y_1)$ un punto (vettore spiccato dall'origine) di $\mathbb{R}^2$. Il numero x_1 è l'ascissa e y_1 l'ordinata di A. La coppia ordinata (x_1, y_1) indica le coordinate di A.

1.2 Prodotto scalare.

Se $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ il prodotto scalare di A e B è il numero

$$A \cdot B = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

1.3 Proiezione di un vettore lungo un altro

Siano $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$. La proiezione di A lungo B è il vettore

$$P_B(A) = \frac{A \cdot B}{B \cdot B} B$$

1.4 Lunghezza di un vettore. Distanza tra due punti

1. La lunghezza di $A = (x_1, y_1)$ è il numero

$$\|A\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

   detta *norma* di A.

2. La distanza di $A = (x_1, y_1)$ da $B = (x_2, y_2)$ è il numero

$$\|B - A\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

1.5 Punto medio di un segmento

Se $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ allora il punto medio $M = (x_M, y_M)$ del segmento $\overline{AB}$ ha coordinate

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\[2ex] y_M = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

2 Rette

2.1 Equazioni parametriche di rette

La retta r contenente il punto $P_0 = (x_0, y_0)$ e avente vettore di direzione $V = (v_1, v_2)$ ha equazioni parametriche

$$P = P_0 + Vt \tag{2.1}$$

dove $t \in \mathbb{R}$ e $P = (x, y)$. Dall'uguaglianza (vettoriale) 2.1 si ottiene:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ \\ y = y_0 + v_2 t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

2.2 Equazioni cartesiane di rette

L'equazione (cartesiana) di una retta del piano in forma implicita è : $ax + by + c = 0$

L'equazione (cartesiana) di una retta del piano in forma esplicita è : $y = mx + q$. Non è possibile rappresentare con un'equazione del tipo $y = mx + q$ le rette parallele all'asse y (perchè?)

Alcune rette importanti

L'equazione dell'asse x è $y = 0$, quella dell'asse y è $x = 0$. L'equazione della bisettrice del primo e terzo quadrante è $y = x$ mentre l'equazione della bisettrice del secondo e quarto quadrante è $y = -x$

2.3 Direzione (pendenza) di una retta

Siano $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ due punti del piano ($A \neq B$).

Vettore di direzione della retta passante per due punti. Un vettore di direzione della retta passante per A e B è

$$B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Coefficiente angolare della retta passante per due punti. Se $x_1 \neq x_2$ allora il coefficiente angolare della retta AB è

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

2.4 Condizione di parallelismo tra rette

• Se le equazioni parametriche delle rette r e s sono

$$r: \begin{cases} x = x_0 + ft \\ \\ y = y_0 + gt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \ , \qquad s: \begin{cases} x = x'_0 + f'u \\ \\ y = y'_0 + g'u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}$$

allora

$$r \parallel s \quad \Longleftrightarrow \quad (f, g) = k(f', g'), \quad k \neq 0$$

• Se le equazioni cartesiane delle rette r e s sono

$$r: \quad y = mx + q, \qquad s: \quad y = m'x + q'$$

allora

$$r \parallel s \quad \Longleftrightarrow \quad m = m'$$

2.5 Condizione di perpendicolarità tra rette

• Se le equazioni parametriche delle rette r e s sono

$$r: \begin{cases} x = x_0 + ft \\ \\ y = y_0 + gt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \ , \qquad s: \begin{cases} x = x'_0 + f'u \\ \\ y = y'_0 + g'u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}$$

allora

$$r \perp s \quad \Longleftrightarrow \quad ff' + gg' = 0$$

• Se le equazioni cartesiane delle rette r e s sono

$$r: \quad y = mx + q, \qquad s: \quad y = m'x + q'$$

allora

$$r \perp s \quad \Longleftrightarrow \quad m\,m' = -1$$

2.6 Fasci di rette

Siano r e r' due rette distinte del piano di equazione, nell'ordine, $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$. L'equazione del fascio di rette aventi per generatrici r e r' è

$$\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0 \tag{2.2}$$

dove λ , $\mu \in \mathbb{R}$. Per ogni coppia (λ, μ) l'uguaglianza (2.2) individua una retta di equazione

$$(\lambda a + \mu a')x + (\lambda b + \mu b')y + \lambda c + \mu c' = 0$$

Se le rette generatrici r, r' sono incidenti e T è il punto di intersezione allora le rette del fascio (2.2) sono tutte e sole le rette passanti per T mentre se r, r' sono parallele (e distinte) le rette del fascio sono tutte e sole le rette parallele a r (r').

È possibile descrivere il fascio di rette utilizzando un solo parametro anzichè due. Infatti, dividendo l'equazione (2.2) per $\lambda \neq 0$ si ottiene

$$(ax + by + c) + \frac{\mu}{\lambda}(a'x + b'y + c') = 0$$

ovvero

$$(ax + by + c) + k(a'x + b'y + c') = 0 \tag{2.3}$$

dove $k = \frac{\mu}{\lambda}$. Si tenga presente che in questo caso NON esiste alcun valore di k che permetta di determinare la retta r'. In altre parole, l'equazione (2.3) fornisce, per ogni $k \in \mathbb{R}$, una retta del fascio meno una: la retta r'.

Esempi

1. L'equazione del fascio di rette di centro (sostegno) $P_0 = (x_0, y_0)$ si scrive spesso nel seguente modo

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

2. (Fascio di rette parallele a una retta data.) Se la retta r ha equazione $y = 2x - 3$ allora il fascio di rette parallele a r ha equazione

$$y = 2x + q$$

2.7 Retta passante per due punti

L'equazione della retta passante per i punti $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ $(x_1 \neq x_2)$ è

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

2.8 Distanza di un punto da una retta

La distanza di $P_0 = (x_0, y_0)$ dalla retta r di equazione $ax + by + c = 0$ è

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

La distanza di $P_0 = (x_0, y_0)$ dalla retta r di equazione $y = mx + q$ è

$$d = \frac{|mx_0 - y_0 + q|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

Prima dimostrazione.

Sia r la retta di equazione $ax + by + c = 0$ e $R = (x_1, y_1)$ un punto qualsiasi di tale retta. Un vettore unitario ortogonale a r è $\mathbf{n} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.

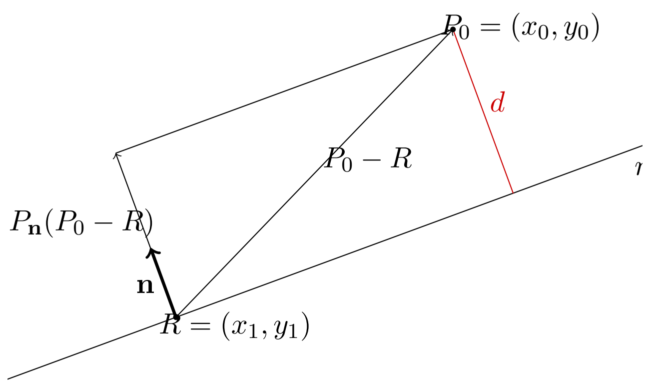

Figura 1: La distanza di P_0 da r coincide con la lunghezza del vettore $P_{\mathbf{n}}(P_0 - R)$ (proiezione di $P_0 - R$ lungo N).

Si osservi la figura 1: la proiezione $P_{\mathbf{n}}(P_0 - R)$ di $P_0 - R$ lungo $\mathbf{n}$ coincide con la distanza cercata. Si ha

$$\begin{aligned}
\|P_{\mathbf{n}}(P_0 - R)\| &= |(P_0 - R) \cdot \mathbf{n}| \\
&= \left|(x_0 - x_1, y_0 - y_1) \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right| \\
&= \left|\frac{a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|
\end{aligned}$$

Infine, osservando che $ax_1 + by_1 + c = 0$ ($R = (x_1, y_1)$ sta sulla retta r) si ottiene

$$d = \|P_{\mathbf{n}}(P_0 - R)\| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Seconda dimostrazione

Si osservi la figura 2.

I due triangoli grigi sono simili (perchè?). Dalla proporzione

$$1 : \sqrt{m^2+1} = d : |mx_0 + q - y_0|$$

si ricava

$$d = \frac{|mx_0 + q - y_0|}{\sqrt{m^2+1}}$$

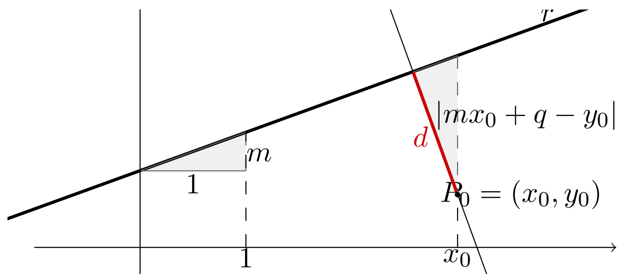

Figura 2:

3 Coniche

3.1 Definizioni di circonferenza, parabola, ellisse, iperbole

3.2 Proprietà ottiche delle coniche

4 Circonferenze

4.1 Equazione della circonferenza

L'equazione (cartesiana) della circonferenza è

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

4.2 Equazione della circonferenza, dato il centro e il raggio

Se il centro della circonferenza è $C = (\alpha, \beta)$ e il raggio è r allora l'equazione della circonferenza è

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

4.3 Disegnare la circonferenza quando è data la sua equazione

Si consideri la circonferenza γ di equazione

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Le coordinate del centro $C = (\alpha, \beta)$ sono

$$\begin{cases} \alpha = & -\dfrac{a}{2} \\[2ex] \beta = & -\dfrac{b}{2} \end{cases}$$

La lunghezza del raggio è $\qquad r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c}$

4.4 Fasci di circonferenze

Si considerino le due circonferenze γ e γ' rispettivamente di equazione

$$\begin{aligned} \gamma: &\qquad x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ \gamma': &\qquad x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0 \end{aligned}$$

L'equazione del fascio di circonferenze generato da γ e γ' ha equazione

$$x^2+y^2+ax+by+c+k(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$$

con k numero reale. Le circonferenze γ e γ' sono le *circonferenze generatrici* del fascio. Sostituendo $k=-1$ nell'equazione del fascio si ottiene la retta

$$(a-a')x+(b-b')y+c-c'=0$$

detta asse radicale del fascio.

5 Parabole.

5.1 Equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y

L'equazione (cartesiana) della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y è

$$y=ax^2+bx+c$$

Le coordinate del vertice sono $V=\left(\dfrac{-b}{2a},\dfrac{-\Delta}{4a}\right)$; quelle del fuoco sono $F=\left(\dfrac{-b}{2a},\dfrac{1-\Delta}{4a}\right)$; l'equazione della direttrice è $y=-\dfrac{1+\Delta}{4a}$

5.2 Casi particolari.

1. Se $b=0$ e $c=0$ la parabola ha vertice nell'origine.
2. Se $b=0$ e $c\neq 0$ la parabola ha vertice sull'asse y in un punto diverso dall'origine.
3. Se $b\neq 0$ e $c=0$ la parabola passa per l'origine.

5.3 Equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse x

L'equazione (cartesiana) della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse x è

$$x=ay^2+by+c$$

5.4 Pendenza della retta tangente alla parabola in un suo punto

1. Sia $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto della parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$. La pendenza della retta tangente alla parabola in P_0 è

$$m = 2ax_0 + b$$

2. Sia $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto della parabola di equazione $x = ay^2 + by + c$. La pendenza della retta tangente alla parabola in P_0 è

$$m = \frac{1}{2ay_0 + b}$$

5.5 Tangenti alla parabola condotte da un punto esterno alla parabola ($\Delta = 0$)

Per trovare le equazioni delle tangenti alla parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ passanti per il punto $P(x_0, y_0)$ (esterno alla parabola) si procede così

1. Si scrive l'equazione del fascio proprio di rette di centro $P(x_0, y_0)$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

2. Si pone a sistema l'equazione della parabola e quella del fascio

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{cases}$$

3. Si ricava y dall'equazione del fascio e si sostituisce il valore trovato nell'equazione della parabola. Si trova un'equazione di secondo grado nell'incognita x che dipende dal parametro m.

4. Si pone la condizione di tangenza

$$\Delta = 0$$

   L'ultima uguaglianza è un'equazione di secondo grado in m le cui soluzioni m_1 e m_2 forniscono le pendenze delle due rette cercate. Sostituendo m_1 e m_2 nell'equazione del fascio si ottengono le equazioni delle due tangenti.

6 Ellissi

6.1 Equazione dell'ellisse

L'equazione (riferita agli assi) dell'ellisse è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Le intersezioni con l'asse x sono $(-a, 0)$ e $(+a, 0)$, quelle con l'asse y sono $(0, -b)$ e $(0, +b)$. I fuochi F_1 e F_2 dell'ellisse stanno sull'asse maggiore;

- se $a > b$ il semiasse *maggiore* dell'ellisse ha lunghezza a; i fuochi sono sull'asse x: $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (+c, 0)$;

- se $a < b$ il semiasse *maggiore* dell'ellisse ha lunghezza b; i fuochi sono sull'asse y: $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, +c)$.

6.2 Relazione tra i semiassi dell'ellisse e la semidistanza focale

Se a, b indicano la lunghezza dei semiassi dell'ellisse e c la semidistanza focale si ha:

$$c^2 = a^2 - b^2, \quad \texttt{se} \;\; a > b$$

$$c^2 = b^2 - a^2, \quad \texttt{se} \;\; a < b$$

6.3 Tangente condotta da un punto dell'ellisse

Sia $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto dell'ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. La retta tangente all'ellisse passante per P_0 ha equazione:

$$\frac{x\,x_0}{a^2} + \frac{y\,y_0}{b^2} = 1$$

6.4 Eccentricità

Si chiama eccentricità dell'ellisse il numero

$$e = \frac{\texttt{semidistanza focale}}{\texttt{semiasse maggiore}}$$

$$\begin{cases} e = \dfrac{c}{a}, & \text{se } a > b \\[2ex] e = \dfrac{c}{b}, & \text{se } a < b \end{cases}$$

L'eccentricità dell'ellisse è un numero compreso tra 0 e 1.

7 Iperboli

7.1 Equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse x

L'equazione (riferita agli assi) dell'iperbole è

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Le intersezioni con l'asse x sono $(-a, 0)$ e $(+a, 0)$; l'asse trasverso ha lunghezza $2a$; i fuochi hanno coordinate $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (+c, 0)$; le equazioni degli asintoti sono $y = \pm\frac{b}{a}x$.

7.2 Equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse y

L'equazione (riferita agli assi) dell'iperbole è

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

Le intersezioni con l'asse y sono $(0, -b)$ e $(0, +b)$; l'asse trasverso ha lunghezza $2b$; i fuochi hanno coordinate $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, +c)$; le equazioni degli asintoti sono $y = \pm\frac{b}{a}x$.

7.3 Relazione tra i semiassi dell'iperbole e la semidistanza focale

Se a, b indicano rispettivamente le lunghezze dei semiassi (trasverso e non trasverso) dell'iperbole e c la semidistanza focale si ha:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

7.4 Tangente condotta da un punto dell'iperbole

Sia $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto dell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. La retta tangente all'iperbole passante per P_0 ha equazione:

$$\frac{x\,x_0}{a^2} - \frac{y\,y_0}{b^2} = 1$$

7.5 Eccentricità

Si chiama eccentricità dell'iperbole il numero

$$e = \frac{\texttt{semidistanza focale}}{\texttt{semiasse trasverso}}$$

L'eccentricità dell'iperbole è un numero maggiore di 1.