Note di fisica.

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria, luglio 2012.

Indice

1 Quantità di moto.

1.1 Quantità di moto di una particella.

La quantità di moto di una particella di massa m che all'istante t possiede velocità v è

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \tag{1.1}$$

Se $\mathbf{F}$ è la risultante delle forze esterne agenti sulla particella si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= m\mathbf{a} \\ &= m\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} \\ &= \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \\ &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} \end{aligned}$$

In meccanica classica (cioè, nell'ipotesi che la particella abbia velocità molto piccola rispetto a quella della luce) l'uguaglianza

[0]Nome file: quantita-di-moto.tex

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{1.2}$$

è un modo equivalente di scrivere la seconda legge della dinamica. In ogni istante t la risultante $\mathbf{F}$ delle forze esterne agenti sulla particella è uguale alla variazione di quantità di moto della particella.

1.2 Quantità di moto di un sistema di particelle.

Siano $P_1, P_2, \ldots, P_n$ n particelle aventi masse, nell'ordine, $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Si supponga che le particelle possano interagire tra loro e che su di esse possano agire forze esterne. Si supponga inoltre che nessuna massa entri o esca dal sistema in modo tale che la massa totale $M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ del sistema si mantenga costante nel tempo.

Dette $v_1, v_2, \ldots, v_n$ le velocità delle singole particelle all'istante t, si chiama `quantità di moto del sistema di particelle` all'istante t la somma (vettoriale) delle quantità di moto delle singole particelle, cioè

$$\mathbf{P} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \cdots + m_n\mathbf{v}_n \tag{1.3}$$

Siano $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ le risultanti delle forze esterne agenti, nell'ordine, su $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Allora si ha:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n &= m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + \cdots + m_n\mathbf{a}_n \\
&= m_1\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + m_2\frac{d\mathbf{v}_2}{dt} + \cdots + m_n\frac{d\mathbf{v}_n}{dt} \\
&= \frac{d(m_1\mathbf{v}_1)}{dt} + \frac{d(m_2\mathbf{v}_2)}{dt} + \cdots + \frac{d(m_n\mathbf{v}_n)}{dt} \\
&= \frac{d(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \cdots + m_n\mathbf{v}_n)}{dt} \\
&= \frac{d\mathbf{P}}{dt}
\end{aligned}$$

Quindi se $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n$ è la risultante delle forze esterne agenti sul sistema di particelle si ha:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \tag{1.4}$$

L'ultima uguaglianza è l'estensione di (1.2) al caso di un sistema di n particelle.

2 Principio di conservazione della quantità di moto.

Se la risultante $\mathbf{F}$ delle forze esterne di un sistema di particelle è nulla, da (1.4), si ottiene:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \tag{2.1}$$

cioè

$$\mathbf{P} = \texttt{costante} \tag{2.2}$$

Vale quindi il *principio di conservazione della quantità di moto*

> *Se la risultante delle forze esterne agenti su un sistema di particelle è zero allora il vettore quantità di moto totale del sistema è costante.*

3 Urti.

Un urto tra due particelle si dice *elastico* se, durante l'urto, l'energia cinetica del sistema si conserva, in caso contrario l'urto si dice *anelastico*. Se le due particelle, dopo l'urto, rimangono a contatto l'urto si dice *completamente anelastico* (è questo il caso di un proiettile che rimane conficcato nel bersaglio).

Le collisioni tra particelle atomiche e nucleari sono a volte (ma non sempre) elastiche. Questi sono gli unici urti veramente elastici che si conoscono; nonostante gli urti tra corpi estesi siano anelastici, in alcuni casi si possono trattare come elastici. Ad esempio, l'urto tra due sfere di acciaio o di vetro è , con buona approssimazione, elastico.

3.1 Urti elastici in una dimensione.

Si consideri il caso di due particelle A e B di masse rispettivamente m_1 e m_2 che, muovendosi lungo la retta AB, si urtano in modo elastico. Durante l'urto le particelle esercitano una sull'altra delle forze che risultano dirette come AB; pertanto dopo l'urto i moti delle due particelle avvengono ancora lungo la medesima retta.

(a) (b)

Figura 1: Esempio di urto elastico: (a) due sfere prima dell'urto; (b) le sfere dopo l'urto

Dette v_{1i}, v_{2i} le velocità delle due particelle prima dell'urto e v_{1f}, v_{2f} le velocità dopo l'urto si ha

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i}) \tag{3.1}$$

$$m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2) \tag{3.2}$$

La prima uguaglianza esprime la conservazione della quantità di moto mentre la seconda la conservazione dell'energia cinetica (l'urto è elastico). Note le masse e le velocità iniziali è possibile conoscere le velocità finali delle due particelle.

Da (3.1) e (3.2) si deduce immediatamente che una soluzione al nostro problema è $v_{1f} = v_{1i}$, $v_{2f} = v_{2i}$. In questo caso non vi è stato alcun urto. Posto allora $v_{1f} \neq v_{1i}$ e $v_{2f} \neq v_{2i}$ si divida l'uguaglianza (3.2) per (3.1); si ottiene il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i}) \\ v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i} \end{cases}$$

Ricavando, ad esempio, v_{1f} e dalla seconda equazione e sostituendo nella prima si ottengono le velocità finali delle due particelle [Esercizio], cioè

$$\begin{cases} v_{1f} &= \left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\dfrac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2i} \\[2ex] v_{2f} &= \left(\dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\dfrac{m_2 - m_1}{m_1 - m_2}\right) v_{2i} \end{cases}$$

`Analisi di alcuni casi interessanti.`

1. Se $m_1 = m_2$ si ottiene $v_{1f} = v_{2i}$, $v_{2f} = v_{1i}$, cioè se le masse sono uguali le velocità delle due particelle si scambiano.

2. Se $m_1 = m_2$ e $v_{2i} = 0$ si ottiene $v_{1f} = 0$, $v_{2f} = v_{1i}$, cioè se le masse sono uguali e la seconda particella è ferma allora la prima particella si ferma di colpo mentre la seconda acquista la velocità che possedeva la prima.

3. Se $m_1 \ll m_2$ e $v_{2i} = 0$ si ottiene $v_{1f} \approx -v_{1i}$, $v_{2f} \approx 0$, cioè se m_1 è molto più piccola di m_2 e la seconda particella è ferma allora la velocità della prima particella viene approssimativamente solo cambiata di segno e la seconda particella rimane pressochè ferma (è il caso di una palla che cade verticalmente sulla terra con urto elastico).

4. Se $m_1 \gg m_2$ e $v_{2i} = 0$ si ottiene: $v_{1f} \approx v_{1i}$, $v_{2f} \approx 2v_{1i}$, cioè se m_1 è molto più grande di m_2 e la seconda particella è ferma allora la velocità della prima particella rimane praticamente invariata mentre la seconda, inizialmente ferma, acquista una velocità che è circa il doppio della velocità della particella incidente (è il caso di una palla da bowling che urta contro un palloncino gonfiato ad aria e inizialmente fermo).

3.2 Urti completamente anelastici.

Si considerino due particelle di massa m_1, m_2 che si muovono lungo la stessa direzione l'una verso l'altra con velocità $\mathbf{v}_{1i}$, $\mathbf{v}_{2i}$. Dopo l'urto le due particelle rimangono a contatto e la loro velocità è $\mathbf{v}_f$. In questo caso la quantità di moto totale si conserva mentre l'energia cinetica no.

(a) (b)

Figura 2: Urto completamente anelastico: (a) le due sfere prima dell'urto; (b) le sfere dopo l'urto

In questo caso, la direzione del moto prima e dopo l'urto è la stessa (il moto è unidimensionale), pertanto basta considerare le intensità delle velocità, senza preoccuparsi della loro direzione. La quantità di moto del sistema prima e dopo l'urto rimane la stessa cioè

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f \tag{3.3}$$

Note le velocità iniziali delle due masse è quindi possibile determinare la velocità finale v_f.

Esempio. Con riferimento all'urto descritto in figura 2, si sa che $m_1 = 1\,\text{Kg}$, $m_2 = 3\,\text{Kg}$, $v_{1i} = 0,5\,\text{m/s}$, $v_{2i} = 2\,\text{m/s}$. Qual'è la velocità dopo l'urto delle due sfere?

Soluzione. La quantità di moto del sistema formato dalle due sfere si conserva, da (3.3) si ricava $1 \cdot 0,5 - 3 \cdot 2 = 4v_f$ e quindi $v_f = -1,375\,\text{m/s}$. Il segno meno sta a indicare che il moto (orizzontale) delle due masse è orientato da destra verso sinistra (come v_{2i}).

4 Esercizi

Esercizio 4.1. *Due canoe A e B sono affiancate in mezzo a un lago. Nell'intento di allontanare le due imbarcazioni il canoista che si trova sulla canoa A spinge la canoa B con una forza di $46\,N$. Sapendo che la massa della canoa A e del suo occupante è $130\,Kg$ mentre quella della canoa B e del suo occupante è $250\,Kg$. Calcolare la quantità di moto di ciscuna canoa dopo $1,20\,\mathrm{s}$ dalla spinta.*

4.1 Soluzioni e risposte.