Moto parabolico.

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria, ottobre 2012.

1 Moto parabolico.

Gli esercizi contrassegnati con (*) sono più difficili.

Problema 1.1 (**Lancio di un proiettile.**). *Un proiettile viene sparato con 'angolo di tiro' pari ad α e velocità iniziale $\boldsymbol{v}_0$. Trascurando la resistenza dell'aria determinare:*

1. *la traiettoria descritta dal proiettile;*
2. *l'altezza massima raggiunta dal proiettile.*
3. *la gittata;*
4. *l'angolo di tiro corrispondente alla gittata massima;*

Soluzione.

Scelta del sistema di riferimento. Il proiettile descrive una traiettoria piana. Si scelga un sistema di riferimento solidale con la terra con queste caratteristiche:

- *origine* coincidente con il punto di lancio del proiettile;
- *asse x* coincidente con la linea di terra (orientato da sinistra verso destra);
- *asse y* ortogonale all'asse x e rivolto verso l'alto.

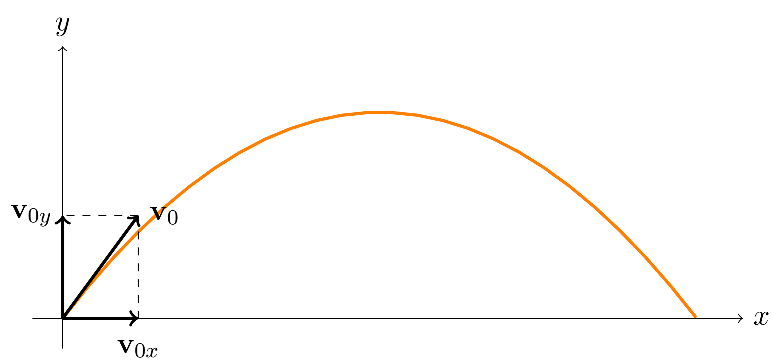

Figura 1: Orbita descritta da un proiettile lanciato con velocità iniziale $\mathbf{v}_0$.

Il moto del proiettile è dato dalla composizione di due moti indipendenti, uno lungo l'asse x e uno lungo l'asse y: il moto lungo l'asse x è uniforme con velocità (costante) $v_x = v_{0x}$,

[0]Nome file: moto-parabolico.tex'

mentre il moto lungo l'asse y è uniformemente decelerato con accelerazione (costante) uguale a $-g$ e velocità iniziale v_{0y}. Pertanto le leggi orarie dei due moti sono

$$\texttt{legge oraria del moto lungo l'asse } x\texttt{:} \qquad x = v_{0x} t \tag{1.1}$$

$$\texttt{legge oraria del moto lungo l'asse } y\texttt{:} \qquad y = v_{0y}\, t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{1.2}$$

Le leggi orarie (1.1) e (1.2) permettono di determinare, nel sistema di riferimento prescelto, la posizione (x, y) del proiettile in ogni istante t del moto.

1. *Traiettoria (orbita) del proiettile.*

   Per ricavare l'equazione della traiettoria del moto del proiettile nel sistema di riferimento prescelto bisogna ricavare il tempo t dall'equazione (1.1):

   $$t = \frac{x}{v_{0x}}$$

   Sostituendo in (1.2) si ottiene:

   $$y = -\frac{g}{2v_{0x}^2}\, x^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}\, x \tag{1.3}$$

   L'orbita del proiettile è parabolica, infatti l'equazione (1.3) rappresenta una parabola passante per l'origine con la concavità rivolta verso il basso.

2. *Altezza massima.* La legge della velocità lungo l'asse y è

   $$v_y(t) = v_{0y} - gt \tag{1.4}$$

   Quando il proiettile raggiunge l'altezza massima la sua velocità lungo l'asse y è nulla. Quindi, ponendo $v_y(t) = 0$ in (1.4) si ricava

   $$t = \frac{v_{0y}}{g} \tag{1.5}$$

   Il valore di t appena trovato costituisce il tempo che il proiettile impiega per raggiungere l'altezza massima. Sostituendo questo valore di t nella legge oraria (1.2) si ottiene l'altezza massima raggiunta dal proiettile, cioè

   $$\texttt{altezza massima} = \frac{(v_{0y})^2}{2g}$$

3. *Gittata.* Si ricordi che per gittata si intende la distanza orizzontale percorsa dal proiettile dal momento dello sparo a quello in cui tocca terra. Innanzitutto si determini il tempo di caduta, cioè il tempo complessivo in cui il proiettile sta in aria. Quando il proiettile tocca terra si trova, nel sistema di riferimento sopra specificato, in un punto

avente quota zero; in altre parole, nel momento in cui tocca terra il proiettile si troverà nella posizione (x, y) con $y = 0$. Allora, posto $y = 0$ in (1.2) si ottiene:

$$v_{0y}\, t - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

Risolvendo questa equazione di secondo grado in t si ricava:

$$t = 0 \text{ oppure } t = \frac{2v_{0y}}{g}$$

Dunque il tempo di caduta è

$$t = \frac{2v_{0y}}{g} \tag{1.6}$$

Si noti che esso è il doppio del tempo impiegato dal proiettile per raggiungere l'altezza massima (si veda il risultato ottenuto in (1.5)). Ciò significa che il tempo impiegato dal proiettile per raggiungere l'altezza massima è il medesimo che impiega per tornare a terra (il "tempo di salita" è uguale al "tempo di discesa").

Ora, per determinare la gittata basta sostituire il tempo di caduta in (1.1). Si ottiene

$$\texttt{gittata} = \frac{2\, v_{0y}\, v_{0x}}{g} \tag{1.7}$$

4. Indicato con α è l'angolo di tiro, si ha

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha \qquad \text{e} \qquad v_{0y} = v_0 \sin\alpha$$

Allora la gittata x_g si può esprimere così

$$x_g = \frac{2\, v_{0y}\, v_{0x}}{g} = \frac{2\, v_0^2\, \cos\alpha \sin\alpha}{g}$$

Poichè $2\cos\alpha\sin\alpha = \sin(2\alpha)$ la formula della gittata diventa

$$x_g = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

Poichè $-1 \leq \sin 2\alpha \leq 1$ la gittata è massima per $\sin 2\alpha = 1$. Quindi l'angolo di tiro corrispondente alla gittata massima è $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

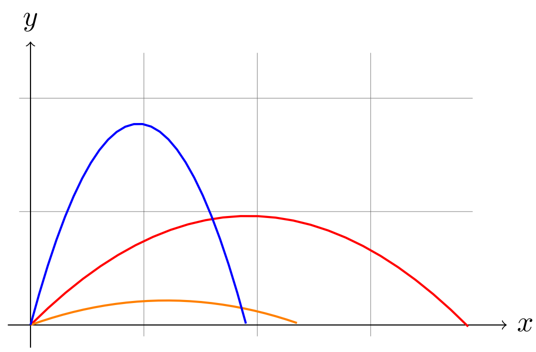

Figura 2: Orbite di tre proiettili lanciati con stessa velocità (in modulo) e diverso angolo di tiro. La gittata risulta massima in corrispondenza di un angolo di tiro pari a 45^o.

Esercizio 1.2. *La figura qui sotto descrive la traiettoria descritta da tre proiettili lanciati da un medesimo punto (l'origine degli assi). Che cosa hanno in comune e per che cosa si diversificano i tre lanci?*

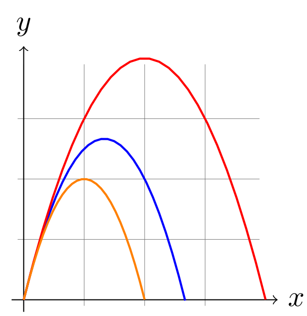

Figura 3: Orbite descritte da tre proiettili lanciati dall'origine degli assi.

Esercizio 1.3. (*) *Nel trattato* Discorsi matematici sopra due nuove scienze *Galileo afferma: "per angoli di tiro che siano superiori o inferiori a* 45^o *della stessa quantità , le gittate sono uguali."Dimostrare l'affermazione di Galileo.*

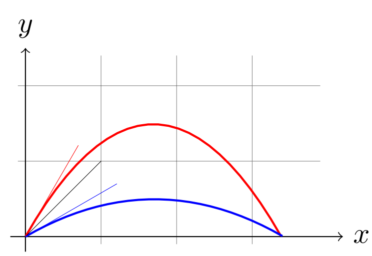

Figura 4: Orbite di due proiettili. L'angolo di tiro della traiettoria rossa è $45^o + \beta$, quello della traiettoria blu è $45^o - \beta$. Le gittate sono uguali.

Soluzione. Indicato con α l'angolo di tiro, la gittata di un proiettile sparato con velocità v_0 vale $x = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$. Quindi, se $\alpha = 45^o + \beta$ la gittata è

$$x = \frac{v_0^2}{g} \sin(90^o + 2\beta) \qquad (1.8)$$

Se invece l'angolo di tiro è $\alpha = 45^o - \beta$, la gittata vale

$$x = \frac{v_0^2}{g} \sin(90^o - 2\beta) \tag{1.9}$$

Poichè $\sin(90^o + 2\beta) = \sin(90^o - 2\beta)$, per ogni β, le due gittate sono uguali.

Esercizio 1.4. *Due proiettili di masse diverse vengono sparati orizzontalmente da un'altezza di* $20\,m$ *rispetto alla linea di terra. La velocità iniziale del primo proiettile è* $v_{1i} = 50\,m/s$ *mentre quella del secondo è* $v_{2i} = 80\,m/s$. *Trascurando ogni forma di attrito, determinare le gittate dei due proiettili.*

Soluzione. Scelta del sistema di riferimento. Si fissi un sistema di riferimento come quello indicato in figura.

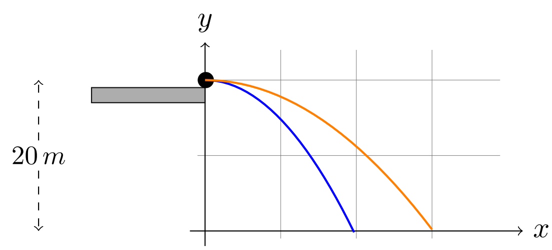

Figura 5: Due proiettili vengono lanciati orizzontalmente con differenti velocità .

Il moto dei due proiettili è descritto dalle seguenti equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 50\,t \\ y = 20 - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{1.10}$$

$$\begin{cases} x = 80\,t \\ y = 20 - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{1.11}$$

Il tempo t impiegato dai due proiettili per arrivare a terra è lo stesso per entrambi i casi (si veda l'esercizio precedente) e si ottiene ricavando t dalla seconda equazione di (1.10) o di (1.11) che è identica. Si ha:

$$t = \sqrt{\frac{40}{g}} = 2.02\,s \tag{1.12}$$

Quindi le due differenti gittate si ottengono sostituendo $t = 2.02$ rispettivamente nella prima equazione di (1.10) e nella prima equazione di (1.11). Si ha:

`gittata del primo proiettile:` $= 50 \cdot 2.02 = 101\,m$

`gittata del secondo proiettile:` $= 80 \cdot 2.02 = 161.6\,m$

Esercizio 1.5. *Due proiettili di masse diverse vengono sparati orizzontalmente da un'altezza h rispetto alla linea di terra. Se le velocità iniziali dei due proiettili sono differenti, quale dei due proiettili impiega più tempo per arrivare a terra? (Trascurare ogni forma di attrito).*

$\boxed{A}$ *Impiegano entrambi lo stesso tempo.*

$\boxed{B}$ *Il proiettile sparato con velocità iniziale maggiore.*

$\boxed{C}$ *Il proiettile sparato con velocità iniziale minore.*

$\boxed{D}$ *Il proiettile con massa maggiore.*

$\boxed{E}$ *Il proiettile con massa minore.*

Esercizio 1.6. *Un calciatore colpisce una palla con angolo di* 30^0 *rispetto all'orizzontale. Nell'ipotesi che la palla descriva una traiettoria piana e che la sua velocità iniziale sia* $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$

a) *determinare l'istante di tempo t in cui la palla raggiunge il punto più alto della sua traiettoria;*

b) *trovare l'altezza massima raggiunta dalla palla;*

c) *determinare per quanto tempo la palla rimane in aria;*

d) *determinare la gittata.*

Esercizio 1.7. *Un cannone viene puntato verso un bersaglio che inizia a cadere (in caduta libera) nell'istante dello sparo. Qualunque sia la velocità del proiettile esso colpisce sempre il besaglio. Perché? Spiegare.*

Esercizio 1.8. *Il pilota di un aereo ha il compito di far pervenire una cassa di viveri in un punto preciso denominato 'bersaglio'. L'aereo si dirige verso il bersaglio volando parallelamente alla linea di terra a una quota di* $5,0\,km$ *e a una velocità costante* $v = 500\,km/h$*. Quale deve essere l'angolo di mira affinché la cassa colpisca il bersaglio? (Trascurare gli attriti).*