Note sul moto circolare uniforme.

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria, ottobre 2012.

Indice

1 Il moto circolare uniforme in sintesi.

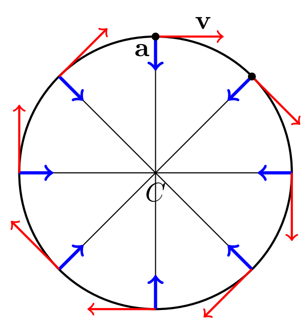

Figura 1: Moto di una particella che descrive la circonferenza di raggio $r = 2$ con velocità unitaria. Il vettore accelerazione è indicato in blù e punta verso il centro della circonferenza, il vettore velocità è quello rosso e risulta in ogni istante tangente alla traiettoria.

1. **Velocità tangenziale.** La direzione del vettore velocità cambia continuamente (il vettore velocità è in ogni istante tangente alla circonferenza), mentre la sua intensità è

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

dove T indica il *periodo*.

2. **Frequenza f.** La frequenza f è il numero di giri che il punto mobile compie attorno alla circonferenza nell'unità di tempo. Si misura in hertz.

$$1\,Hz = \frac{1\,\texttt{giro}}{\texttt{secondo}}$$

[0]Nome file: moto-circolare-uniforme-2012.tex'

3. **Relazione tra frequenza e periodo**:

$$f \cdot T = 1$$

4. **Accelerazione centripeta.** L'accelerazione punta sempre verso il centro della circonferenza e per questo si chiama accelerazione centripeta. La sua intensità è

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

5. **Velocità angolare.** Se il raggio vettore $\overrightarrow{r}$ spazza l'angolo α (misurato in radianti) nel tempo t allora la velocità angolare ω è data da $\omega = \frac{\alpha}{t}$. Poichè il raggio vettore descrive l'angolo $\alpha = 2\pi$ nel tempo T si ha:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

6. *Relazione tra velocità tangenziale v e velocità angolare ω.* Poichè $v = \dfrac{2\pi r}{T}$ si ha:

$$v = \omega r$$

7. *Relazione tra accelerazione centripeta a_c e velocità angolare ω.* Poichè $a_c = \dfrac{v^2}{r}$ si ha: $a_c = \dfrac{\omega^2 r^2}{r}$. Quindi

$$a_c = \omega^2 r$$

2 L'idea di Hamilton

Si consideri una particella o un pianeta P che si muove in modo uniforme lungo un cerchio di raggio r e centro C. La direzione del moto di P è in ogni istante tangente al cerchio e continua a cambiare, così come continua a cambiare la direzione della velocità $\mathbf{v}$. D'altra parte la particella P si muove di moto circolare uniforme, quindi *percorre distanze uguali in tempi uguali*; questo significa che il modulo v della velocità (la distanza che P percorre nell'unità di tempo, indipendentemente dalla direzione) è costante.

Se la velocità di P in P_1 è rappresentata in direzione e intensità dal vettore $\overrightarrow{P_1A_1}$ e la velocità in P_2 è rappresentata dal vettore $\overrightarrow{P_2A_2}$ allora entrambi i vettori devono avere la stessa lunghezza:

$$|\overrightarrow{P_1A_1}| = |\overrightarrow{P_1A_1}| = v$$

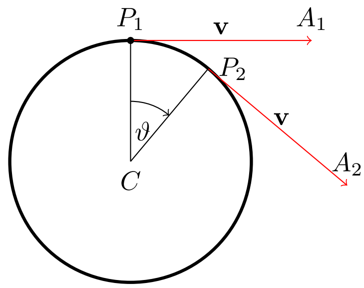

Figura 2: Moto circolare uniforme: P descrive il cerchio di centro C con velocità $\mathbf{v}$. Il modulo v (la distanza percorsa nell'unità di tempo) è costante. I vettori $\overrightarrow{P_1A_1}$ e $\overrightarrow{P_2A_2}$ hanno stessa lunghezza ma diversa direzione.

Il fatto che i vettori velocità abbiano la stessa lunghezza interessò moltissimo Hamilton. Qual è il vero significato di questa ipotesi? In altre parole, quali conseguenze si possono dedurre dal fatto che P si muove con velocità costante (in modulo)? Per rispondere a questa domanda Hamilton escogitò un nuovo modo di raffigurare i vettori velocità e chiamò questa rappresentazione "odografa".

Egli duplicò i vettori $\overrightarrow{P_1A_1}$ e $\overrightarrow{P_2A_2}$ e, mantenendo invariate direzione e lunghezza, fece in modo che risultassero spiccati da uno medesimo punto prefissato O. Così $\overrightarrow{OA_1}$ risulta essere una copia di $\overrightarrow{P_1A_1}$ e $\overrightarrow{OA_2}$ una copia di $\overrightarrow{P_2A_2}$. Poiché i due nuovi vettori sono paralleli agli originali, l'angolo θ individuato dalle copie è uguale all'angolo individuato dagli originali.

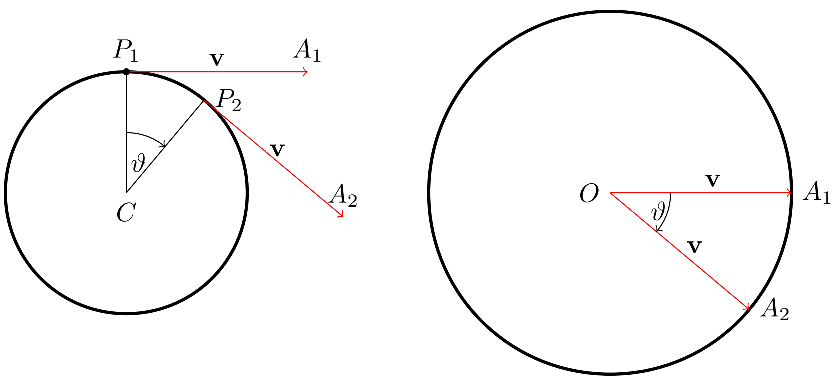

Figura 3: La rappresentazione di Hamilton dei vettori velocità . Quando P descrive il cerchio di centro C la punta A del vettore velocità descrive il cerchio di centro O.

Si può pensare ai due cerchi della figura come ai quadranti di due orologi *sincroni* nel senso che mentre la lancetta $\overrightarrow{CP}$ ruota uniformemente da $\overrightarrow{CP_1}$ a $\overrightarrow{CP_2}$ sul primo quadrante, la lancetta $\overrightarrow{OA}$ ruota da $\overrightarrow{OA_1}$ a $\overrightarrow{OA_2}$ sul secondo quadrante. Ne segue che $\overrightarrow{OA}$ descrive l'intero cerchio partendo da $\overrightarrow{OA_1}$ e tornando in $\overrightarrow{OA_1}$ nello stesso tempo T in cui $\overrightarrow{CP}$ descrive l'intero cerchio partendo da CP_1 e tornando in CP_1.

Cosa si può dedurre da questo fatto?

La particella P, muovendosi con velocità uniforme v, descrive nel tempo T un cerchio di raggio r. Quindi

$$Tv = 2\pi r \tag{2.1}$$

Nel medesimo tempo T (gli orologi sono sincroni) il punto A descrive con velocità uniforme il cerchio di raggio v. Indicata con a la velocità del punto A si ottiene:

$$Ta = 2\pi\, v \tag{2.2}$$

Dalle equazioni (2.1) e (2.2) si ricava:

$$\frac{Ta}{Tv} = \frac{2\pi\, v}{2\pi\, r} \tag{2.3}$$

$$\frac{a}{v} = \frac{v}{r} \tag{2.4}$$

Infine, si ottiene:

$$a = \frac{v^2}{r} \tag{2.5}$$

Che cosa rappresenta a? a è il modulo della velocità istantanea del punto A, il suo valore non cambia nel tempo perchè il moto di A è uniforme. Ma, ricordiamo, $\overrightarrow{OA}$ è la copia del vettore che rappresenta la velocità di P, quindi a è *il modulo dell'accelerazione istantanea di* P.

Ma l'accelerazione è una grandezza vettoriale, *qual è allora la sua direzione*?

Ancora una volta bisogna fare riferimento alla Figura 3: il moto del punto A quando si trova in A_1 è istantaneamente tangente al cerchio in A_1, cioè perpendicolare a OA_1 e di conseguenza parallelo a P_1C. Così l'accelerazione di P in P_1 ha la direzione del vettore $\overrightarrow{P_1C}$, cioè è diretta verso il centro del suo cerchio di rotazione.

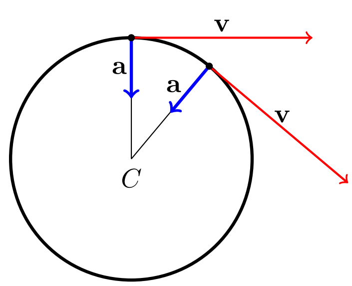

Figura 4: Nel moto circolare uniforme il vettore accelerazione **a** è diretto verso il centro C del cerchio di rotazione e il suo modulo vale $a = \dfrac{v^2}{r}$.

3 Esercizi

Esercizio 3.1. *La terra compie una rivoluzione completa attorno al sole in circa* 365 *giorni e* 6 *ore. Supponendo l'orbita circolare (raggio orbitale medio* $= 1.496 \cdot 10^8\,\mathrm{km}$*), determinare la velocità tangenziale della terra. (Esprimere il risultato in* $\mathrm{km/s}$*).*

Esercizio 3.2. *La luna compie una rivoluzione completa attorno alla terra in* 27.3 *giorni. Supponendo l'orbita circolare, determinare l'accelerazione centripeta della luna dovuta al suo moto di rivoluzione.*

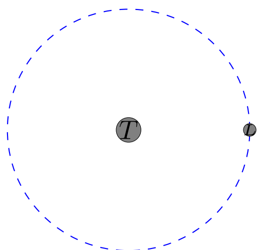

Figura 5: Il moto di rivoluzione della luna attorno alla terra. L'orbita è supposta circolare.

Esercizio 3.3. *Un satellite ruota attorno alla terra a un'altezza di* $200\,km$ *dalla superficie terrestre descrivendo un'orbita circolare. L'unica forza che agisce sul satellite è la forza gravitazionale terrestre che a quell'altezza è circa* $\overline{g} = 9.2\,m/s^2$*. Perchè il satellite non cade sulla terra?*

$\boxed{A}$ *Il satellite non cade perché a quella quota l'accelerazione di gravità è quasi nulla.*

$\boxed{B}$ *Il satellite non cade perché corregge periodicamente la sua traiettoria attivando i motori.*

$\boxed{C}$ *Il satellite non cade a causa della sua velocità tangenziale.*

$\boxed{D}$ *Il satellite non cade a causa della forza gravitazionale esercitata su di lui dal sole.*

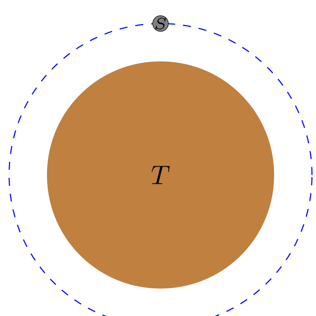

Figura 6: Perché il satellite non cade sulla terra?

Esercizio 3.4. *Un satellite artificiale orbita attorno alla terra con moto circolare uniforme. Detta* g *l'accelerazione di gravità e* R *il raggio dell'orbita, dimostrare che la velocità tangenziale del satellite è* $v = \sqrt{R\,g}$*.*

Soluzione. Si consideri la seguente figura

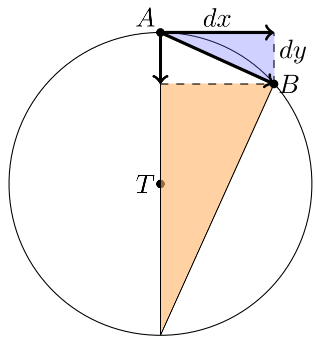

Figura 7: Satellite che ruota attorno alla terra di moto circolare uniforme. Il centro T dell'orbita coincide con il centro della terra.

Nell'intervallino di tempo dt il satellite, inizialmente nella posizione A, si sposta di un tratto $dx = v\,dt$ lungo la tangente all'orbita e di un tratto $dy = \frac{1}{2}g\,(dt)^2$ in direzione radiale, orientato verso il centro della terra. Trascorso questo intervallino di tempo, il satellite raggiunge la posizione B.

Si osservi ora che il triangolo infinitesimo azzurro è simile al triangolo arancione (perchè?). Pertanto, detto R il raggio dell'orbita, si ha:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2R - dy}{dx} \tag{3.1}$$

Posto $dx = v\,dt$ e $dy = \frac{1}{2}g\,(dt)^2$ l'uguaglianza (3.1) diventa:

$$\frac{v\,dt}{\frac{1}{2}g\,(dt)^2} = \frac{2R - \frac{1}{2}g\,(dt)^2}{v\,dt} \tag{3.2}$$

$$\frac{2v^2}{g} = 2R - \frac{1}{2}g\,(dt)^2$$

Infine, trascurando il termine infinitesimo di secondo grado (cioè , ponendo $(dt)^2 = 0$), si ottiene:

$$g = \frac{v^2}{R} \qquad \text{e} \qquad v = \sqrt{Rg}$$

Esercizio 3.5. *Un satellite artificiale orbita attorno alla terra con moto circolare uniforme ad un'altezza di $200\,km$ dal suolo. Sapendo che l'accelerazione di gravità a quella quota è $g = 9.2\,m/s^2$, si determini:*

1. *la velocità tangenziale del satellite.*
2. *il periodo dell'orbita.*

Soluzione.

1. Il raggio dell'orbita circolare è $R = (6380 + 200)\,km = 6580\,km$. Quindi la velocità tangenziale del satellite è

$$v = \sqrt{R\,g} = \sqrt{6\,580\,000 \cdot 9.2} = 7\,780\,m/s$$

   Quindi la velocità del satellite è poco meno di $8\,km/s$.

2. Il periodo dell'orbita è $T = \frac{2\pi R}{v}$. In questo caso si ha:

$$T = \frac{2\pi \cdot 6\,580\,000}{7\,780.5} = 48\,886\,s \sim 88.5\,min$$

Il 4 ottobre 1957 l'URSS mandò in orbita attorno alla terra il primo satellite artificiale, lo Sputnik 1. Aveva le dimensioni di una sfera di $58\,cm$ di diametro, pesava 83.3 kg, il suo periodo orbitale era di circa 96 minuti, l'orbita era ellittica: la distanza dalla superficie terrestre variava da 228 km a 947 km.

3.1 Risposte

Esercizio 3.1 La velocità tangenziale della terra è circa 29.79 km/s, cioè 107228 km/h.

Esercizio 3.3 La risposta esatta è C.