NUMERI REALI

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria. Ottobre 2017.

Indice

[0] Nome file .tex: reali_2017.tex'

1 Numeri reali

1.1 Il lato e la diagonale del quadrato sono incommensurabili: la scoperta dei numeri irrazionali

Non sempre la misura di un segmento si può esprimere mediante un numero razionale.

Si consideri il quadrato di lato 1 e sia d la misura della sua diagonale. Il Teorema di Pitagora afferma che la somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti è uguale all'area del quadrato costruito sull'ipotenusa, cioè $d^2 = 1 + 1 = 2$ e $d = \sqrt{2}$.

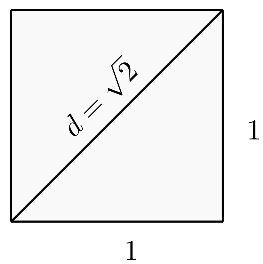

Figura 1: La diagonale del quadrato di lato 1 misura $\sqrt{2}$. Di che numero si tratta?

Vale il seguente

Teorema 1.1 (**Scuola pitagorica. 6 a.C.**). *$\sqrt{2}$ non è un numero razionale.*

Prima dimostrazione.

Si supponga, per assurdo, che $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ con p, q numeri interi primi fra loro ($M.C.D(p,q) = 1$).

Dall'uguaglianza precedente si ottiene $2 = \dfrac{p^2}{q^2}$ cioè

$$2q^2 = p^2$$

Pertanto p^2 e p sono numeri pari[1]. Posto allora $p = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$) si ottiene:

$$2q^2 = p^2 = (2m)^2 = 4m^2$$

Dividendo per 2 si ricava:

[1]

Vale il seguente fatto:

(i) Se $x \in \mathbb{N}$ e x^2 è pari allora x è pari.

Si osservi che la stessa proprietà si può formulare in modo equivalente così:

(ii) Se $x \in \mathbb{N}$ e x è dispari allora x^2 è dispari.

La dimostrazione è lasciata per esercizio.

$$q^2 = 2m^2$$

Questa uguaglianza dice che q^2 è pari e quindi anche q deve essere pari.

Riassumendo, si è giunti ad affermare che p e q sono entrambi pari, contro l'ipotesi che i due numeri siano primi fra loro. ∎

Seconda dimostrazione.

Si supponga, per assurdo, che $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ con p, q numeri interi primi fra loro ($M.C.D(p, q) = 1$).

Dall'uguaglianza precedente si ottiene $\dfrac{p^2}{q^2} = 2$, cioè

$$p^2 = 2q^2 \tag{1.1}$$

Se $p = 1$ si ottiene immediatamente $1 = 2q^2$, che è assurdo. Se invece $p > 1$, per il *teorema fondamentale dell'aritmetica* , il numero p si fattorizza in modo unico (a meno dell'ordine dei fattori) nel prodotto dei suoi numeri primi, quindi

$$p = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots\ldots p_n^{\alpha_n} \tag{1.2}$$

Elevando al quadrato l'ultima uguaglianza e da (1.1) si ricava

$$p^2 = 2q^2 = p_1^{2\alpha_1} \cdot p_2^{2\alpha_2} \cdot \ldots\ldots p_n^{2\alpha_n} \tag{1.3}$$

Quindi i numeri primi che costituiscono la fattorizzazione di p^2 e di $2q^2$ compaiono tutti un numero pari di volte. Ciò è assurdo perchè nella scomposizione di $2q^2$ il fattore primo 2 deve necessariamente comparire un numero *dispari* di volte. ∎

1.2 Definizione provvisoria dei numeri reali come allineamenti decimali

Per il momento, diamo una definizione provvisoria (e imprecisa) dei numeri reali: i numeri reali sono rappresentati da tutti i possibili *allineamenti decimali*, illimitati oppure no. Un allineamento si dice illimitato se contiene infinite cifre non nulle dopo la virgola; si dice limitato se le cifre dopo la virgola sono tutte uguali a zero, da un certo posto in poi. Per motivi che saranno chiariti in seguito (vedere gli esercizi), non usiamo il periodo 9. (Vedremo che se ne può fare a meno). Dimostreremo più avanti che un numero reale è razionale se, e solo se, è rappresentato da un allineamento periodico (incluso il caso del periodo zero, come per il numero razionale $\frac{1}{2} = 0,5 = 0,5000...$). I numeri irrazionali sono dunque rappresentati da allineamenti decimali illimitati non periodici. Ad esempio, questo è il caso dei numero irrazionali $\sqrt{2} = 1.414..$ oppure $\pi = 3.14..$ eccetera.

1.3 $\mathbb{R}$ è un *campo*

Nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali sono definite due operazioni fondamentali: quella di somma, e quella di prodotto. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ la somma si denota con '$a + b$' e il prodotto con '$a \cdot b$' (oppure con 'ab'). Per queste due operazioni valgono i seguenti assiomi

Assiomi della somma.

Per l'operazione '+' di somma valgono le seguenti proprietà

1. *Proprietà commutativa.* Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$
$$a + b = b + a$$
2. *Proprietà associativa.* Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$
$$(a + b) + c = a + (b + c)$$
3. *Esistenza dell'elemento neutro della somma.* Per ogni $a \in \mathbb{R}$ vale
$$a + 0 = 0 + a = a$$
Il numero 0 si chiama *elemento neutro* della somma.
4. *Esistenza dell'elemento opposto.* Per ogni elemento $a \in \mathbb{R}$ esiste un elemento $b \in \mathbb{R}$, detto *opposto* di a, per il quale si ha
$$a + b = b + a = 0$$
L'opposto di a è il numero $b = -a$.

Assiomi del prodotto.

Per l'operazione ' $\cdot$ ' di prodotto valgono le seguenti proprietà

1. *Proprietà commutativa.* Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$
$$a \cdot b = b \cdot a$$
2. *Proprietà associativa.* Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$
3. *Esistenza dell'elemento neutro del prodotto.* Per ogni $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ vale
$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$
Il numero 1 si dice *elemento neutro* del prodotto.

4. *Esistenza dell'elemento inverso.* Per ogni elemento $a \in \mathbb{R}$ esiste un elemento $b \in \mathbb{R}$, detto *inverso* di a, per il quale si ha

$$a \cdot b = b \cdot a = 1$$

L'inverso di a è il numero $b = a^{-1}$.

Vale inoltre la *proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma*: per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Le due operazioni di somma e prodotto, collegate tra loro dalla proprietà distributiva, fanno di $\mathbb{R}$ un *campo*.

1.4 $\mathbb{R}$ è un campo *ordinato*

Inoltre, $\mathbb{R}$ è un *campo ordinato*: questo significa che in $\mathbb{R}$ è definita una *relazione di ordine* totale che si denota '$\leq$' per la quale valgono i seguenti assiomi

1. *Proprietà riflessiva.* Per ogni $a \in \mathbb{R}$

$$a \leq a$$

2. *Proprietà simmetrica.* Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$

$$\text{se } a \leq b \text{ e } b \leq a \text{ allora } a = b$$

3. *Proprietà transitiva.* Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\text{se } a \leq b \text{ e } b \leq c \text{ allora } a \leq c$$

Inoltre la relazione d'ordine definita in $\mathbb{R}$ è compatibile con le operazioni di somma e prodotto, ossia:

1. Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$\text{se } a \leq b \text{ allora } a + c \leq b + c$$

2. Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $c > 0$,

$$\text{se } a \leq b \text{ allora } ac \leq bc$$

3. Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $c < 0$,

$$\text{se } a \leq b \text{ allora } ac \geq bc$$

1.5 $\mathbb{R}$ è un campo ordinato *completo*

Ultimo assioma, ma non per questo meno importante, è l'assioma di *completezza* dei numeri reali. Ne esistono diverse formulazioni, tutte equivalenti tra loro; qui, per non appesantire la trattazione, se ne dà una formulazione intuitiva, rimandando a una fase successiva l'enunciato rigoroso.

Affermare che $\mathbb{R}$ è *completo* significa asserire che *a ogni punto della retta dei numeri corrisponde uno ed un solo numero reale e viceversa, a ogni numero reale corrisponde uno e un solo punto sulla retta dei numeri.* Segue che $\mathbb{R}$ è adeguato per misurare qualunque tipo di grandezza.

La proprietà di completezza ricopre un ruolo essenziale in molte dimostrazioni, per esempio viene utilizzata per dimostrare l'esistenza della radice quadrata di numeri non negativi:

Teorema 1.2. *Per ogni numero reale $a \geq 0$, esiste un unico numero reale $b \geq 0$ per il quale $b^2 = a$.*

Questo unico numero si denota $\sqrt{a}$ (radice quadrata di a). Qui non si riporta la dimostrazione di questo teorema.

2 Alcune proprietà dei numeri reali

2.1 Un numero moltiplicato per zero dà zero

Teorema 2.1. *Per ogni a in $\mathbb{R}$,*

$$a \cdot 0 = 0$$

Dimostrazione.

Utilizzando la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma si scrive

$$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = (a \cdot 0) + (a \cdot 0) \tag{2.1}$$

Sommando ai due termini dell'uguaglianza $a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$, l'opposto di $a \cdot 0$ si ottiene: $-(a \cdot 0) + a \cdot 0 = -(a \cdot 0) + (a \cdot 0) + (a \cdot 0)$. Segue $a \cdot 0 = 0$ ∎

2.2 Più per meno fa meno

Teorema 2.2. *Per ogni a, b in $\mathbb{R}$,*

$$a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$$

Dimostrazione.

Utilizzando la proprietà distributiva

$$a \cdot b + a \cdot (-b) = a \cdot (b + (-b)) = a \cdot 0 = 0$$

Dunque, $a \cdot (-b)$ è l'opposto di $a \cdot b$, ossia $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$.

2.3 Meno per meno fa più

Teorema 2.3. *Per ogni a, b in $\mathbb{R}$,*

$$(-a)(-b) = ab$$

2.4 Legge di annullamento del prodotto

Teorema 2.4. *Per ogni a, b in $\mathbb{R}$,*

$$\textit{se} \;\; a \cdot b = 0 \;\; \textit{allora} \;\; a = 0 \;\; \textit{oppure} \;\; b = 0$$

Dimostrazione.

Per ipotesi

$$a \cdot b = 0 \tag{2.2}$$

Se $a = 0$ il teorema è dimostrato. Se $a \neq 0$, allora a è invertibile. Moltiplicando per a^{-1} entrambi i termini dell'uguaglianza (2.2), si ha:

$$= a^{-1} \cdot a \cdot b = a^{-1} \cdot 0 = 0$$

Segue $b = 0$. ■

3 Valore assoluto

Definizione 3.1. *Il* valore assoluto *o* modulo *di un numero $a \in \mathbb{R}$ si definisce così:*

$$|a| = \begin{cases} a & \textit{se } a \geq 0; \\ -a & \textit{se } a < 0. \end{cases}$$

4 Esercizi

Esercizio 4.1. *Dimostrare che*

1. $\sqrt{5}$ *è un numero irrazionale.*
2. $\sqrt{10}$ *è un numero irrazionale.*
3. $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$ *è un numero irrazionale.*

Esercizio 4.2. *Dimostrare che se x è un numero irrazionale e $y \neq 0$ è un numero razionale allora il loro prodotto xy è irrazionale.*

Esercizio 4.3 (Vero o Falso?). *Dire se le seguenti proposizioni sono vere o false motivando le risposte.*

$\boxed{V}\boxed{F}$ *La somma di due numeri irrazionali è un numero irrazionale.*

$\boxed{V}\boxed{F}$ *Il prodotto di due numeri irrazionali è un numero irrazionale.*

$\boxed{V}\boxed{F}$ $\sqrt{11} + \sqrt{2} = \sqrt{13}$.

Esercizio 4.4. *Dimostrare la seguente proprietà .*

Se x e y sono due interi non negativi allora

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

Esercizio 4.5. *Dimostrare che in un triangolo equilatero lato e altezza sono incommensurabili.*

Esercizio 4.6 (Vero o Falso?). *Dire se le seguente proposizione è vera o falsa motivando la risposta.*

$\boxed{V}\boxed{F}$ *Se il numero $\sqrt{n}$, $(n \in \mathbb{N})$ non è un quadrato perfetto allora $\sqrt{n}$ è irrazionale.*

Esercizio 4.7. *Si considerino i numeri $x = 7 + \sqrt{2}$ e $y = 7 - \sqrt{2}$.*

1. *I numeri x e y sono irrazionali?. Spiegare.*
2. *Determinare i numeri $x + y$ e xy.*
3. *Determinare i numeri x^2 e y^2.*

Esercizio 4.8. *Dimostrare che $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ è un numero irrazionale.*

Esercizio 4.9 (Trasporto di un fattore fuori dal segno di radice.)**.** *Dimostrare che* $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Esercizio 4.10 (Trasporto di un fattore fuori dal segno di radice.)**.** *In ognuna delle seguenti espressioni portare fuori, se possibile, un fattore dal segno di radice*

1. $\sqrt{\dfrac{2}{25}}$
2. $\sqrt{\dfrac{12}{25}}$
3. $\sqrt{27x^2}$
4. $\sqrt{9x+9}$
5. $\sqrt{x^2+y^2}$
6. $\sqrt{\dfrac{1}{x}+x+2}$
7. $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+x^2+2}$

Esercizio 4.11. *Si dimostri che* $\frac{1}{2}+\sqrt{2}$ *è irrazionale.*