Isometrie. Seconda parte.

Mauro Saita

maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria. Ottobre 2011.

Indice

1 Rotazioni

In questa sezione si ricorda la definizione di *angolo* e si introduce un'altra classe di isometrie: le rotazioni piane.

Definizione 1.1 (Angolo). *Siano r e r' due semirette del piano aventi l'origine in comune. Chiamiamo* angolo *la parte convessa di piano delimitata da r e r'.*

Nel caso in cui le semirette r, r' siano opposte la regione angolare non è univocamente determinata perchè le due semirette dividono il piano in due semipiani e quindi sarà necessario precisare quale tra le due regioni convesse si vuole considerare.

L'angolo individuato dalle semirette r e r' sarà indicato con $\widehat{rr'}$ oppure, tutte le volte che ciò non darà adito ad ambiguità , con le lettere greche α, β, $\gamma \ldots$.

Una rotazione piana suscita l'idea del moto rotatorio continuo, tuttavia, in questo contesto, dobbiamo pensare alla rotazione come ad una *trasformazione*, cioè come il passaggio da una situazione iniziale (prima del moto rotatorio) a una finale (dopo il moto). Quindi, una rotazione è il risultato di una ben determinata trasformazione geometrica, senza alcun riferimento alle fasi intermedie che realizzano la trasformazione stessa. Queste considerazioni chiariscono almeno in parte il senso della seguente

Definizione 1.2 (Rotazione). *Una rotazione è un'isometria del piano in sé con esattamente un punto fisso oppure l'identità . L'unico punto fisso della rotazione (che non sia l'identità) si chiama* centro *della rotazione.*

1.1 Principali proprietà della rotazione

Il teorema seguente assicura che la precedente definizione coincide con la nostra idea intuitiva di rotazione e mostra che una rotazione, come ogni altra isometria, si può ottenere componendo simmetrie assiali.

Teorema 1.3. *Se r e s sono due semirette aventi l'origine O in comune allora esiste una ed una sola rotazione con centro O che trasforma la semiretta r nella semiretta s.*

[0]Nome file: "isometrie-01-2011.tex"

Dimostrazione. La dimostrazione si divide in due parti: nella prima si mostra che *esiste* una rotazione che trasforma r in s, mentre nella seconda si dimostra che l'isometria trovata è l'*unica* isometria con le proprietà richieste.

Esistenza. Con riferimento alla figura, sia b la bisettrice dell'angolo $\widehat{rs}$ e siano $\pi \xrightarrow{S_r} \pi$, $\pi \xrightarrow{S_b} \pi$ le due simmetrie assiali rispettivamente di assi r e b. Si vuole verificare che l'isometria

$$R = S_b \circ S_r$$

è la rotazione cercata.

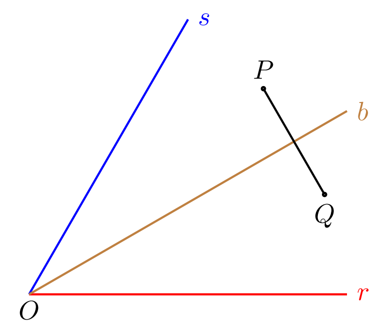

Figura 1

Innanzitutto si osservi che $S_b \circ S_r$ manda la semiretta r nella semiretta s perché i punti della semiretta r sono fissi nella simmetria S_r mentre vengono trasformati nella semiretta s dalla simmetria S_b. Per dimostrare che $S_b \circ S_r$ è una rotazione bisogna mostrare che essa ha un unico punto fisso oppure è l'identità .

Si distinguono due casi:

- $r = s$. In questo caso la bisettrice b coincide con le due semirette e, di conseguenza, $S_b \circ S_r$ è l'identità (che è una rotazione per definizione).
- $r \neq s$. Si supponga, per assurdo, che esista un punto $P \neq O$ per il quale risulta

$$S_b \circ S_r(P) = P \tag{1.1}$$

dall'uguaglianza (1.1), componendo a sinistra per S_b si ottiene

$$(S_b \circ S_b \circ S_r)(P) = S_b(P) \tag{1.2}$$

Posto allora

$$S_b(P) = Q \tag{1.3}$$

dall'uguaglianza (1.2) si ricava[1]:

$$S_r(P) = Q \tag{1.4}$$

Dalle uguaglianze $S_b(P) = Q$ e $S_r(P) = Q$ si deduce che le due semirette b e r sono entrambe assi del medesimo segmento $\overline{PQ}$. Poichè l'asse di un segmento è unico si ha $r = b$ e di conseguenza $r = s$. Ciò contraddice l'assunzione iniziale.

Unicità . Esiste un'altra rotazione che manda r in s? Se A è un punto della semiretta r diverso da O e A' è un punto di s con $d(O, A) = d(O, A')$ allora, per l'assioma A7.1, esistono esattamente due isometrie che tengono fisso il punto O e trasformano A in A'. Per quanto si è appena dimostrato, una di queste isometrie è $S_b \circ S_r$ mentre l'altra è ovviamente la simmetria assiale S_b. Poichè S_b non è una rotazione (ha una retta di punti fissi) si deduce che $S_b \circ S_r$ è l'unica rotazione che manda r in s. ■

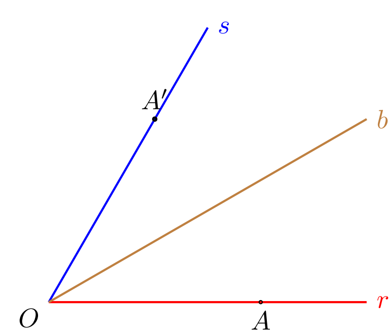

Figura 2

Esercizio 1.4. *Il precedente teorema dimostra che esiste ed è unica la rotazione che manda la semiretta r nella semiretta s. Tuttavia* esistono infinite coppie di simmetrie che generano tale rotazione*: ad esempio, posto $\widehat{rs} = \alpha$, la rotazione attorno ad O di angolo α si può esprimere così:*

$$R_\alpha = S_s \circ S_b$$

Sapreste individuarne altre?

[1] Si ricordi che le simmetrie assiali sono involutorie, pertanto $S_b \circ S_b = 1_\pi (= \text{Identità })$

Esercizio 1.5. *Siano R_α e R_β due rotazioni attorno ad un medesimo centro O. Dimostrare che se esiste un punto $P \neq O$ per il quale risulta $R_\alpha(P) = R_\beta(P)$ allora $R_\alpha = R_\beta$.*

In altre parole, dimostrare che due rotazioni di centro O coincidono se coincidono in almeno un punto diverso dal centro di rotazione.

Soluzione. Si tratta, ancora una volta, di un'immediata conseguenza del teorema 1.3. Infatti, l'unica rotazione che tiene fisso O, centro della rotazione, e che trasforma P in $R_\alpha(P)$ è $S_b \circ S_r$. ∎

Esercizio 1.6. *Siano $\pi \xrightarrow{S_a} \pi$ e $\pi \xrightarrow{S_b} \pi$ due simmetrie assiali rispettivamente di assi a e b.*

Dimostrare che se le rette a e b sono incidenti in O allora l'isometria $\pi \xrightarrow{S_b \circ S_a} \pi$ è una rotazione di centro O e angolo $\alpha = 2 \cdot \widehat{ab}$.

Teorema 1.7. *La composizione di due rotazioni di centro O è una rotazione di centro O*

IPOTESI: $\pi \xrightarrow{R_1} \pi$ $\pi \xrightarrow{R_2} \pi$ sono rotazioni di centro O.

TESI: $\pi \xrightarrow{R_2 \circ R_1} \pi$ è una rotazione di centro O.

Dimostrazione.

Sia R_1 la rotazione che manda la retta r nella retta s, R_2 la rotazione che manda la retta s nella retta t, b e c le bisettrici, nell'ordine, degli angoli $\widehat{rs}$ e $\widehat{st}$. Dal teorema 1.3 e dall'esrcizio 1.4 si ottiene

$$R_1 = S_s \circ S_b \quad (1.5)$$
$$R_2 = S_c \circ S_s \quad (1.6)$$

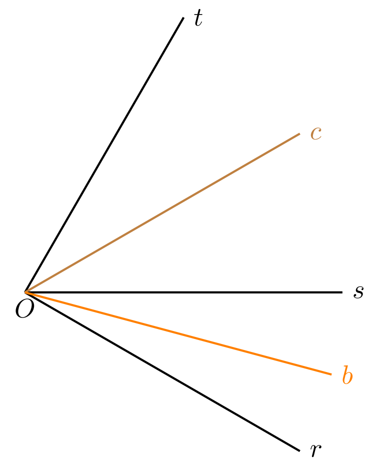

Figura 3

Si ricava:

$$\begin{aligned} R_2 \circ R_1 &= (S_c \circ S_s) \circ (S_s \circ S_b) && \text{(uguaglianze 1.5 e 1.6)} \\ &= S_c \circ (S_s \circ S_s) \circ S_b && \text{(proprietà associativa della composizione di funzioni)} \\ &= S_c \circ S_b && \text{(le simmetrie assiali sono involutorie)} \end{aligned}$$

$R_2 \circ R_1$ è la composizione di due simmetrie assiali con assi incidenti in O e quindi è una rotazione di centro O. ∎

Esercizio 1.8. *Se R_1 e R_2 sono due rotazioni di centro O rispettivamente di angoli α e β, che cosa si può dire sull'ampiezza dell'angolo di rotazione di $R_2 \circ R_1$?*

Teorema 1.9. *L'inversa di una rotazione è una rotazione.*

Basta verificare che se $R = S_a \circ S_b$ allora, per la rotazione inversa, si ha $R^{-1} = S_b \circ S_a$.

La dimostrazione è lasciata per esercizio.

2 Traslazioni

Definizione 2.1 (Traslazione)**.** *Si chiama* traslazione *la trasformazione*

$$\pi \xrightarrow{T} \pi$$

del piano in sé con questa proprietà : tutti i punti del piano π si spostano in una stessa direzione, nello stesso verso e di una medesima distanza*, oppure*
$\pi \xrightarrow{T} \pi$ *è l'identità .*

Esercizio 2.2. *Verificare che una traslazione $\pi \xrightarrow{T} \pi$ è completamente individuata da una coppia di elementi corrispondenti nella traslazione stessa.*

Suggerimento. Fare un disegno accurato della traslazione che manda il punto P in P'. Utilizzando esclusivamente la definizione di traslazione, qual è il trasformato di un qualsiasi punto $Q \neq P$ del piano π?

A questo punto è facile dimostrare che

Teorema 2.3. *Una traslazione $\pi \xrightarrow{T} \pi$ trasforma una retta in una retta ad essa parallela.*

2.1 Il gruppo delle traslazioni.

Qui di seguito sono elencate le principali proprietà delle traslazioni. Ogni singolo fatto verrà dimostrato in classe.

1. La composizione di due traslazioni è una traslazione cioè se $\pi \xrightarrow{T_1} \pi$, $\pi \xrightarrow{T_2} \pi$ sono traslazioni allora $\pi \xrightarrow{T_2 \circ T_1} \pi$ è una traslazione.

2. Per le traslazioni vale la proprieta commutativa, cioè se $\pi \xrightarrow{T_1} \pi$, $\pi \xrightarrow{T_2} \pi$ sono traslazioni allora

$$T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$$

3. Per le traslazioni vale la proprietà associativa, cioè se $\pi \xrightarrow{T_1} \pi$, $\pi \xrightarrow{T_2} \pi$, $\pi \xrightarrow{T_3} \pi$, sono traslazioni allora

$$(T_1 \circ T_2) \circ T_3 = T_1 \circ (T_2 \circ T_3)$$

4. L'identità (che è una traslazione per definizione) è l'elemento neutro nell'insieme delle traslazioni, cioè
   per ogni traslazione $\pi \xrightarrow{T} \pi$ si ha

$$T \circ 1_\pi = 1_\pi \circ T$$

   dove 1_π indica l'identità .

5. Ogni traslazione ammette inversa, cioè se $\pi \xrightarrow{T} \pi$ è una traslazione allora esiste la traslazione inversa $\pi \xrightarrow{T^{-1}} \pi$ per la quale vale la proprietà

$$T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = 1_\pi$$

Se T è la traslazione individuata dalla coppia (P, P') allora T^{-1} è individuata dalla coppia (P', P).

Per sintetizzare le cinque proprietà sopra enunciate si dice che le traslazioni formano un *gruppo commutativo* rispetto all'operazione di composizione di funzioni.

2.2 Traslazioni e simmetrie

Valgono i seguenti due toeremi

Teorema 2.4. *Il prodotto di due simmetrie centrali è una traslazione. In termini più precisi, se* $\pi \xrightarrow{S_O} \pi$ *e* $\pi \xrightarrow{S_{O'}} \pi$ *sono due simmetrie centrali rispettivamente di centro* O *e* O' *allora*

$$\pi \xrightarrow{S_O \circ S_{O'}} \pi$$

è una traslazione avente direzione quella della retta OO'*, verso da* O *a* O' *e intensità il doppio della distanza* $d(O, O')$*.*

Teorema 2.5. *Il prodotto di due simmetrie assiali con assi paralleli è una traslazione. In termini più precisi, se* $\pi \xrightarrow{S_a} \pi$ *e* $\pi \xrightarrow{S_b} \pi$ *sono due simmetrie assiali rispettivamente di asse* a *e* b *allora*

$$\pi \xrightarrow{S_b \circ S_a} \pi$$

è una traslazione avente direzione ortogonale ai due assi, verso da a *a* b *e intensità il doppio della distanza tra gli assi* a *e* b*.*