La scoperta dei numeri irrazionali.

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria, ottobre 2012.

Indice

1 Il lato e la diagonale del quadrato sono incommensurabili.

Non sempre la misura di un segmento si può esprimere mediante un numero razionale.

Si consideri il quadrato di lato uno e sia d la misura della sua diagonale. Il Teorema di Pitagora afferma che la somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti è uguale all'area del quadrato costruito sull'ipotenusa, cioè $d^2 = 1 + 1 = 2$ e $d = \sqrt{2}$.

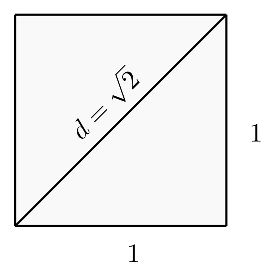

Figura 1: La diagonale del quadrato di lato 1 misura $\sqrt{2}$. Di che numero si tratta?

Vale il seguente

Teorema 1.1 (Scuola pitagorica. 6 a.C.). *$\sqrt{2}$ non è un numero razionale.*

Prima dimostrazione.

Si supponga, per assurdo, che $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ con p, q numeri interi primi fra loro ($M.C.D(p, q) = 1$).

Dall'uguaglianza precedente si ottiene $2 = \dfrac{p^2}{q^2}$ cioè

$$2q^2 = p^2$$

Pertanto p^2 e p sono numeri pari[1]. Posto allora $p = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$) si ottiene:

[0] Nome file: irrazionali-2012.tex'

[1] Vale il seguente fatto:

(i) Se $x \in \mathbb{N}$ e x^2 è pari allora x è pari.

Si osservi che la stessa proprietà si può formulare in modo equivalente così:

(ii) Se $x \in \mathbb{N}$ e x è dispari allora x^2 è dispari.

La dimostrazione è lasciata per esercizio.

$$2q^2 = p^2 = (2m)^2 = 4m^2$$

Dividendo per 2 si ricava:

$$q^2 = 2m^2$$

Questa uguaglianza dice che q^2 è pari e quindi anche q deve essere pari.

Riassumendo, si è giunti ad affermare che p e q sono entrambi pari, contro l'ipotesi che i due numeri siano primi fra loro. $\blacksquare$

Seconda dimostrazione.

Si supponga, per assurdo, che $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ con p, q numeri interi primi fra loro ($M.C.D(p,q) = 1$).

Dall'uguaglianza precedente si ottiene $\dfrac{p^2}{q^2} = 2$, cioè

$$p^2 = 2q^2 \tag{1.1}$$

Se $p = 1$ si ottiene immediatamente $1 = 2q^2$, che è assurdo. Se invece $p > 1$, per il *teorema fondamentale dell'aritmetica*[2], il numero p si fattorizza in modo unico (a meno dell'ordine dei fattori) nel prodotto dei suoi numeri primi, cioè

$$p = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots\ldots p_n^{\alpha_n} \tag{1.2}$$

Elevando al quadrato l'ultima uguaglianza e da (1.1) si ricava

$$p^2 = 2q^2 = p_1^{2\alpha_1} \cdot p_2^{2\alpha_2} \cdot \ldots\ldots p_n^{2\alpha_n} \tag{1.3}$$

Quindi i numeri primi che costituiscono la fattorizzazione di p^2 e di $2q^2$ compaiono tutti un numero pari di volte. Ciò è assurdo perchè nella scomposizione di $2q^2$ il fattore primo 2 deve necessariamente comparire un numero *dispari* di volte. $\blacksquare$

1.1 Esercizi

Esercizio 1.2. *Dimostrare che*

1. $\sqrt{5}$ *è un numero irrazionale.*
2. $\sqrt{10}$ *è un numero irrazionale.*
3. $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$ *è un numero irrazionale.*

Esercizio 1.3. *Dimostrare che se x è un numero irrazionale e $y \neq 0$ è un numero razionale allora il loro prodotto xy è irrazionale.*

[2] Il teorma fondamentale dell'aritmetica afferma che ogni numero intero maggiore di uno si scrive in modo unico (a meno dell'ordine dei fattori) come prodotto di numeri primi.

Esercizio 1.4 (Vero o Falso?). *Dire se le seguenti proposizioni sono vere o false motivando le risposte.*

$\boxed{V}\boxed{F}$ *La somma di due numeri irrazionali è un numero irrazionale.*

$\boxed{V}\boxed{F}$ *Il prodotto di due numeri irrazionali è un numero irrazionale.*

$\boxed{V}\boxed{F}$ $\sqrt{11} + \sqrt{2} = \sqrt{13}$.

Esercizio 1.5. *Dimostrare la seguente proprietà .*
Se x e y sono due interi non negativi allora

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

Esercizio 1.6. *Dimostrare che in un triangolo equilatero lato e altezza sono incommensurabili.*

Esercizio 1.7 (Vero o Falso?). *Dire se le seguente proposizione è vera o falsa motivando la risposta.*

$\boxed{V}\boxed{F}$ *Se il numero $\sqrt{n}$, ($n \in \mathbb{N}$) non è un quadrato perfetto allora $\sqrt{n}$ è irrazionale.*

Esercizio 1.8. *Si considerino i numeri $x = 7 + \sqrt{2}$ e $y = 7 - \sqrt{2}$.*

1. *I numeri x e y sono irrazionali?. Spiegare.*
2. *Determinare i numeri $x + y$ e xy.*
3. *Determinare i numeri x^2 e y^2.*

Esercizio 1.9. *Dimostrare che $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ è un numero irrazionale.*

Esercizio 1.10 (Trasporto di un fattore fuori dal segno di radice.)**.** *Dimostrare che $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.*

Esercizio 1.11 (Trasporto di un fattore fuori dal segno di radice.)**.** *In ognuna delle seguenti espressioni portare fuori, se possibile, un fattore dal segno di radice*

1. $\sqrt{\dfrac{2}{25}}$
2. $\sqrt{\dfrac{12}{25}}$
3. $\sqrt{27x^2}$
4. $\sqrt{9x+9}$
5. $\sqrt{x^2+y^2}$
6. $\sqrt{\dfrac{1}{x} + x + 2}$
7. $\sqrt{\dfrac{1}{x^2} + x^2 + 2}$