Funzioni

Mauro Saita
e-mail: maurosaita@tiscalinet.it
22 ottobre 2011.

Indice

1 Funzioni

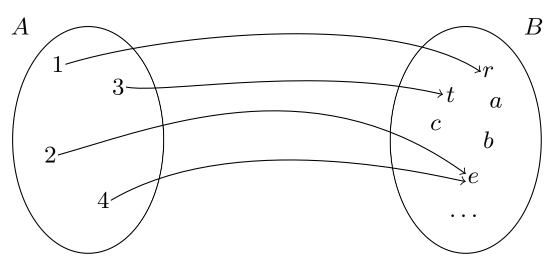
Definizione 1.1. *Una* $\boxed{\text{funzione}}$ f *da* A *in* B *consiste di:*

1. *un insieme* A *detto* dominio *della funzione;*
2. *un insieme* B *detto* codominio *della funzione;*
3. *una* regola o azione f *che assegna ad* ogni *elemento* a *del dominio un* unico *elemento* b *del codominio.*

L'elemento b si chiama *immagine* di a tramite f e si indica con il simbolo $f(a)$ (si legge: "f di a"). Si scrive $A \xrightarrow{f} B$ oppure $f : A \longrightarrow B$ per denotare una funzione f il cui dominio è A e il cui codominio è B.

Esercizio 1.2. *Si consideri la funzione* $A \xrightarrow{f} B$ *così definita:*

1. A = $\{1, 2, 3, 4\}$
2. B = $\{$*Tutte le lettere dell'alfabeto*$\}$
3. f = *la regola che associa al numero* 1 *la lettera* r, *al numero* 3 *la lettera* t *e ai numeri* 2 *e* 4 *la lettera* e.



[0]Nome file: funzioni-1e-2011.tex

Quello della figura è un disegno della situazione, che chiamiamo $\boxed{\textit{diagramma interno}}$ della funzione. Per indicare che la regola f associa al numero 1 la lettera r scriviamo $f(1) = r$. Cosa dobbiamo scrivere negli altri casi? $\boxed{}$

La funzione $A \xrightarrow{f} B$ rappresenta una parola di quattro lettere, quale? $\boxed{}$

Una qualunque parola (anche priva di significato) di lunghezza n è una funzione (specificare dominio e codominio) $\boxed{}$

Esercizio 1.3. *Sia $A \xrightarrow{f} B$ la funzione definita nel seguente modo:*

1. A = {*Esseri viventi*}
2. B = {*Tutte le specie*}
3. f = *la regola che associa ad ogni essere vivente la sua specie.*

Disegnare un possibile diagramma interno della funzione

Esercizio 1.4. *Si consideri la funzione $N \xrightarrow{f} P$ definita nel seguente modo:*

1. N = {*Numeri naturali*}
1. P = {*Quadrati perfetti*}
2. f = *la regola che associa ad ogni numero naturale il suo quadrato.*

$$\begin{array}{llllllll} N: & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 9 & \ldots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ P: & 1 & 4 & 9 & 16 & \ldots & 81 & \ldots \end{array}$$

L'espressione analitica che esprime la regola di questa funzione è $\boxed{\textit{f(x)=}}$

Dominio N e codominio P: quale dei due insiemi contiene il maggior numero di elementi? Perché?

Esercizio 1.5. *Construire una funzione* $A \xrightarrow{f} B$*, dove* f *è la regola che ad ogni persona associa il suo padre naturale.*

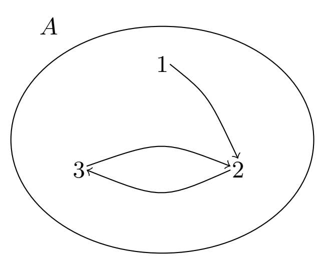
Ci sono alcuni aspetti generali che sono comuni a tutti i diagrammi interni di una funzione:

1. *per ogni* punto del dominio c'è *esattamente* una freccia che parte da quel punto;
2. dato un punto del codominio è ammesso un numero qualunque di frecce che arriva in quel punto: zero, una o più di una.

La cosa fondamentale è dunque questa: da ogni punto del dominio deve partire esattamente una freccia che lo collega a un elemento del codominio.

Si osservi che nella precedente discussione non è escluso che dominio e codominio siano lo stesso insieme: una funzione per la quale il dominio sia uguale al codominio, si chiama $\boxed{\textit{endofunzione}}$.

Esempio. Si consideri l'endofunzione $A \xrightarrow{g} A$ dove $A = \{1, 2, 3\}$ e la regola g è così definita: l'elemento 1 è associato all'elemento 2, l'elemento 2 è associato all'elemento 3 e infine, l'elemento 3 è associato all'elemento 2. Tale funzione può essere rappresentata graficamente mediante il seguente diagramma interno:



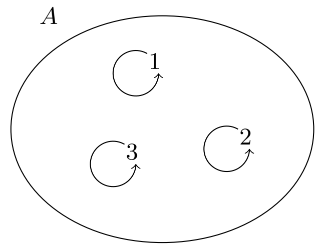
Funzione identità

Per ogni insieme A, esiste una particolare endofunzione, detta $\boxed{\textit{funzione identità}}$ di A che denotiamo con la scrittura:

$$A \xrightarrow{1_A} A$$

La funzione identità di A è definita nel modo seguente: il dominio e il codominio di 1_A sono l'insieme A stesso, e $f(x) = x$ per ogni elemento x in A.

Se, ad esempio, $A = \{a, b, c\}$ allora la *funzione identità* di A si può rappresentare così:



1.1 Esercizi

Esercizio 1.6. *In che modo la lista del "menù" di un ristorante può essere interpretata mediante il concetto di funzione? Spiegare.*

Esercizio 1.7. *In un film la corrispondenza tra "personaggi - attori" può essere interpretata come una funzione? Pensare a un film specifico e discutere la situazione.*

Esercizio 1.8. *La regola che associa a un libro il suo autore può essere utilizzata per costruire una funzione? Spiegare.*

Esercizio 1.9. *Un pronostico al gioco del Totocalcio è una funzione. Specificare dominio, codominio e regola.*

Esercizio 1.10. *Dati gli insiemi $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{x, y\}$, Rispondere alle seguenti domande motivando le risposte:*

1. *Quante sono le funzioni da A a B?*
2. *Quante sono le funzioni da B a A?*
3. *Quante sono le endofunzioni di A?*
4. *Quante sono le endofunzioni di B?*

Esercizio 1.11. *Considerare la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ cosí definita:*

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = 3(x - 1).$$

Calcolare $f(0)$, $f(1)$ e $f(2)$. $f(0) =$ $f(1) =$ $f(2) =$

Esercizio 1.12. *Si consideri la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ cosí definita:*

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{1}{9}x^2 - 4$$

Calcolare $f(-3)$, $f(+2)$ e $f\left(-\frac{3}{7}\right)$.

Definizione 1.13 (Controimmagine)**.** *Si consideri la funzione $A \xrightarrow{f} B$ e un elemento b del codominio. Si chiama* controimmagine di b mediante f *(e si scrive "$f^{-1}(b)$") il sottoinsieme di A così definito*

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$$

L'insieme $f^{-1}(b)$ si chiama anche *fibra di f sull'elemento b.* Esso può essere formato da uno o più elementi oppure coincidere con l'insieme vuoto.

Esercizio 1.14. *Si consideri la funzione $\mathbb{N} \setminus \{0\} \xrightarrow{f} \mathbb{N}$, $f(n) = \frac{1}{n}$. Determinare, se esiste, $f^{-1}(0)$ e $f^{-1}(3)$ (cioè determinare, se esiste, la controimmagini di 0 e quella di 3).*

Esercizio 1.15. *Considerare le due seguenti funzioni*

$$\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N} \qquad \forall x \in \mathbb{N} \quad f(x) = 2(x+1)$$

$$\mathbb{N} \xrightarrow{g} \mathbb{N} \qquad \forall x \in \mathbb{N} \quad g(x) = (2x+2)$$

E' giusto, in questo caso, affermare che f e g sono uguali*?*

In generale, date due funzioni f e g quali condizioni devono verificarsi perchè si possa scrivere: "f=g"?

1.2 Composizione di funzioni

Se f e g sono due funzioni per le quali *il codominio di f coincide con il dominio di g*, ossia

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

allora si può costruire una nuova funzione $g \circ f$

$$A \xrightarrow{g \circ f} C$$

definendo

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

per ogni x in A. (Talvolta si denota più semplicemente la funzione composta $g \circ f$ con gf).

Possiamo visualizzare la situazione con il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Si noti che la funzione composta $g \circ f$ non è sempre definita: è definita soltanto quando il codominio di f coincide con il dominio di g.

Esercizio 1.16. *Siano* $A = \{Tutti\, gli\, uomini\}$ *e* $B = \{Tutte\, le\, donne\}$. *Considerare la funzione* $\text{‘}madre' : A \longrightarrow B$ *che assegna ad ogni uomo sua madre e la funzione* $\text{‘}padre' : B \longrightarrow A$ *che assegna ad ogni donna suo padre. La situazione puó essere schematizzata così*

$$\{Tutti\, gli\, uomini\} \xrightarrow{\text{‘}madre\text{’}} \{Tutte\, le\, donne\}$$

$$\{Tutti\, gli\, uomini\} \xleftarrow{\text{‘}padre\text{’}} \{Tutte\, le\, donne\}$$

Analizzare le funzioni composte $madre \circ padre$ *e* $padre \circ madre$ *e dire che cosa rappresentano.*

Esercizio 1.17. *Siano:*

- $X = \{Mauro, Monica, Silvana\}$;
- $Y = \{Emiliano, Bruno, Annalisa\}$;
- $Z = \{latte, caff\grave{e}, yogurt, the\}$;
- $X \xrightarrow{g} Y$ *la funzione “amare” così definita:* $Mauro\, ama\, Annalisa$, $Monica\, ama\, Bruno$, *Silvana ama Bruno;*
- $Y \xrightarrow{f} Z$ *la funzione “colazione preferita” così definita: Emiliano preferisce il latte, Bruno preferisce il* $caff\grave{e}$, *Annalisa preferisce il* $caff\grave{e}$.

Rappresentare mediante diagrammi interni:

1. *la funzione* $X \xrightarrow{g} Y$ *e la funzione* $Y \xrightarrow{f} Z$;
2. *la funzione* $X \xrightarrow{f \circ g} Z$.

Rispondere alla seguente domanda: “cosa dovrebbe servire per colazione Mauro alla persona che ama?”

Esercizio 1.18. *Si considerino le funzioni*

$$\begin{array}{lll} 1) & \mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N} & f(n) = n - 2 \\ 2) & \mathbb{N} \xrightarrow{g} \mathbb{N} & g(n) = 3n + 1 \end{array}$$

Trovare $g \circ f$ *e* $f \circ g$ *(scrivere un'espressione analitica per entrambe le funzioni).*

Definizione 1.19 (Punti fissi di una funzione). *Si consideri la endofunzione* $A \xrightarrow{f} A$, $y = f(x)$. *I* punti fissi di f *sono gli elementi* $x \in A$ *per i quali risulta* $f(x) = x$.

Esercizio 1.20. *Trovare, se esistono, i punti fissi delle funzioni*

$$\begin{array}{lll} 1) & \mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N} & f(n) = n + 3 \\ 2) & \mathbb{N} \xrightarrow{g} \mathbb{N} & g(n) = 2n \end{array}$$

1.3 Proprietà della composizione di funzioni

Per la composizione di funzioni valgono le seguenti proprietà :

LEGGI D'IDENTITA' *Se* $A \xrightarrow{f} B$, *allora*

$$f \circ 1_A = f \quad \text{e} \quad 1_B \circ f = f \tag{1.1}$$

Questo significa che i diagrammi qui sotto riportati "commutano"

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "1_B"] \\ & B \end{tikzcd}$$

LEGGE ASSOCIATIVA *Se*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

allora

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \tag{1.2}$$

Dunque per la legge dell'associatività, il diagramma seguente commuta:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h \circ g"] & \\
& C \arrow[r, "h"] & D
\end{tikzcd}$$

La legge associativa permette di tralasciare la parentesi e scrivere semplicemente $h \circ g \circ f$ (oppure hgf).

1.4 Funzioni invertibili

Definizione 1.21. *Una funzione* $A \xrightarrow{f} B$ *si dice* invertibile *se esiste una funzione* $B \xrightarrow{g} A$ *per cui risulti:*

$$g \circ f = 1_A \quad e \quad f \circ g = 1_B$$

Una tale funzione g *(se esiste) si chiama* funzione inversa *di* f.

Osservazione Se $A \xrightarrow{f} B$ ha inversa, allora l'inversa (che è unica) si denota con il simbolo f^{-1}.

1.5 Funzioni iniettive, suriettive e biunivoche

Consideriamo i seguenti esempi:

Esempio. Si considerino gli insiemi $A = \{Automobili\}$, $B = \{Targhe\}$ e la funzione $A \xrightarrow{f} B$, dove f è la regola che permette di associare ad ogni auto la sua targa.

È importante che non vi siano due (o più) automobili con lo stesso numero di targa in quanto, il numero di targa deve costituire il codice identificativo di ogni automobile .

Esempio. Si considerino gli insiemi $A = \{Telefoni\}$, $B = \{Numeri\}$ e la funzione $A \xrightarrow{f} B$, dove f è la regola che permette di associare ad ogni telefono un numero telefonico.

E' importante che non vi siano due (o più) telefoni con lo stesso numero telefonico altrimenti componendo quel numero non saremmo certi di parlare con la persona desiderata.

Le due funzioni che abbiamo appena esaminato possiedono questa proprietà: *a elementi distinti del dominio sono associati elementi distinti del codominio*[1].

Definizione 1.22. *Una funzione* $A \xrightarrow{f} B$ *si dice* iniettiva *se associa ad elementi distinti del dominio elementi distinti del codominio, cioè se soddisfa la seguente condizione:*

$$\forall x_1, x_2 \in A, \qquad se\ f(x_1) = f(x_2),\ allora\ x_1 = x_2.$$

Esercizio 1.23. *Consideriamo la funzione* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *caratterizzata dalla seguente regola:* $f(n) = 2n + 3$. *Dimostrare che tale funzione è iniettiva.*

[1]In altre parole, riferendoci ai diagrammi esterni *due frecce non confluiscono mai in uno stesso elemento.*

Soluzione. Abbiamo appena osservato che una funzione per essere iniettiva *non* deve avere due frecce che confluiscono in uno stesso elemento.

Nel nostro caso, se ciò si verificasse, significherebbe che $2n_1 + 3 = 2n_2 + 3$ e cioè $n_1 = n_2$.

Questo significa che, fissato un elemento del codominio vi è un unico elemento di $\mathbb{N}$ da cui esso proviene. Pertanto la funzione dell'esempio è certamente iniettiva.

Esercizio 1.24. *Disegnare due diagrammi interni di funzioni iniettive e due di funzioni che non lo sono.*

Esercizio 1.25. *Dati gli insiemi $A = \{0,1\}$ e $B = \{a,b,c\}$ determinare tutte le possibili funzioni* iniettive *da A in B e disegnare i relativi diagrammi interni. Quante sono?*

Vediamo ora qualche altro esempio

Esempio. Consideriamo la funzione $\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{N}$ definita dalla regola che permette di associare ad ogni $x \in \mathbb{Z}$ il suo quadrato e cioè

$$x \longmapsto x^2$$

In questo caso ogni elemento del codominio è raggiunto da almeno una freccia (più precisamente, ogni numero naturale $n \neq 0$ ha esattamente due controimmagini mentre $n = 0$ ne ha una sola).

Esempio. Si considerino gli insiemi $A = \{Persone\}$, $B = \{Comuni\}$ e la funzione

$A \xrightarrow{f} B$ dove f è la regola che permette di associare ad ogni persona il proprio comune di residenza.

Notate che ogni elemento di B è il corrispondente di molti elementi di A, (cioè , ogni elemento di B è raggiunto da molte frecce). Questa è la proprietà che caratterizza le funzioni suriettive.

Definizione 1.26. *Una funzione $A \xrightarrow{f} B$ si dice* suriettiva *se ogni elemento di B è il corrispondente di almeno un elemento di A cioè se*

$$\forall b \in B \quad \exists a \in A \qquad per\,cui\,risulta: \;\; f(a) = b.$$

Esempio. Consideriamo la funzione $A \xrightarrow{f} B$ definita nel seguente modo:

$$\begin{aligned} A &= \{Panini\} \\ B &= \{Studenti \quad III \quad Af\} \end{aligned}$$

e f è la regola che associa ad ogni panino uno studente della classe, in base all'appetito di ognuno.

Dire che la funzione è suriettiva è come dire che nessun ragazzo rimane senza panino (ma può anche accadere che uno studente ne riceva più di uno). Dire che la funzione è iniettiva è come dire che nessun ragazzo riceve più di un panino (ma può anche accadere che qualcuno rimanga senza).

Si dice *immagine* di A secondo f e si indica con Im (f) (oppure con $f(A)$) l'insieme di tutti gli elementi $b \in B$ che sono raggiunti da una freccia. In termini precisi

$$\text{Im }(f) = \{b \in B \,|\, \exists a \in A \text{ per cui: } f(a) = b\}$$

In generale si ha che: Im $(f) \subseteq B$

Esercizio 1.27. *Dimostrare che*

$$A \xrightarrow{f} B \text{ \emph{è suriettiva se e solo} } \mathrm{Im}\,(f) = B \text{)}$$

Un'altra categoria di funzioni molto importanti in matematica è quella delle *funzioni biunivoche* cioè di quelle funzioni che sono sia iniettive che suriettive. Diamo allora l'ultima definizione di questo paragrafo.

Definizione 1.28. *Una funzione* $A \xrightarrow{f} B$ *si dice* biunivoca *se è, allo stesso tempo, iniettiva e suriettiva.*

1.6 Esercizi

Esercizio 1.29. *Sia* X *un insieme con* n *elementi* ($n > 0$) *e sia* $\mathbf{1}$ *un insieme con un solo elemento. Quante sono le funzioni* $X \longrightarrow \mathbf{1}$ *? Quante sono le funzioni* $\mathbf{1} \longrightarrow X$ *?*

Esercizio 1.30. *Gli insiemi* A *e* B *siano rispettivamente il dominio e il codominio di una funzione* $f : A \longrightarrow B$. *Disegnare, quando è possibile, i diagrammi interni di una funzione biunivoca nei seguenti tre casi:*

$$\begin{array}{lll} a] & A = \{x_1, x_2\} & B = \{y_1, y_2, y_3\}; \\ b] & A = \{x_1, x_2, x_3\} & B = \{y_1, y_2, \}; \\ c] & A = \{x_1, x_2, x_3\} & B = \{y_1, y_2, y_3\}; \end{array}$$