Euclide. *Elementi*

Parte seconda

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Versione provvisoria. Novembre 2011.[1]

Indice

[1]Nome File: euclide-2-2011.tex

1 Libro I

Per la traduzione degli *Elementi* di Euclide riportate in queste note si è utilizzato il testo: *EUCLIDE. Tutte le opere.* A cura di Fabio Acerbi, edizione Bompiani, 2008.

In rete, all'indirizzo

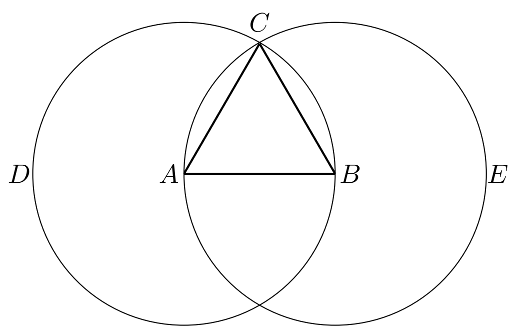
http: //it.wikibooks.org/wiki//Elementi_di_Euclide/

è disponibile la versione degli *Elementi* tradotta in italiano volgare da Niccolò Tartaglia, matematico bresciano del cinquecento, e pubblicata a Venezia nel 1565.

1.1 Proposizione 1. Costruzione del triangolo equilatero di lato assegnato.

Proposizione 1.

Costruire sulla retta limitata data un triangolo equilatero.



Si deve pertanto costruire sulla retta AB un triangolo equilatero.

Con centro A e intervallo AB sia stato tracciato un cerchio BCD, e di nuovo con centro B e intervallo BA sia stato tracciato un cerchio ACE, e dal punto C, secondo cui si secano tra loro i cerchi, fino ai punti A, B siano state congiunte rette CA, CB.

E poichè il punto A è centro del cerchio CDB, AC è uguale a AB; di nuovo, poichè il punto B è centro del cerchio CAE, BC è uguale a BA. E fu anche dimostrata CA uguale a AB: una e l'altra delle CA, CB è quindi uguale a AB. E gli uguali allo stesso sono anche uguali tra loro: anche CA è quindi uguale a CB: le tre CA, AB, BC sono quindi uguali tra loro.

Il triangolo ABC è quindi equilatero, e risulta costruito sulla retta limitata data AB. [...] il che si doveva fare.

Proposizione 1.

Costruire il triangolo equilatero di lato assegnato AB.

Ipotesi: lato $\overline{AB}$.

Tesi: il triangolo ABC è equilatero.

Dimostrazione.

Dato il segmento AB, si tracci [Postulato 3] il cerchio BCD di centro A e raggio AB e il cerchio ACE di centro B e raggio BA. Questi cerchi si intersecano in due punti: detto C uno di essi, si congiunga [Postulato 1] il punto A con C e il punto B con C. Si ha:

$$\overline{AB} \cong \overline{AC} \quad \text{perchè raggi della circonferenza } BCD \text{ [Def. 15]}$$

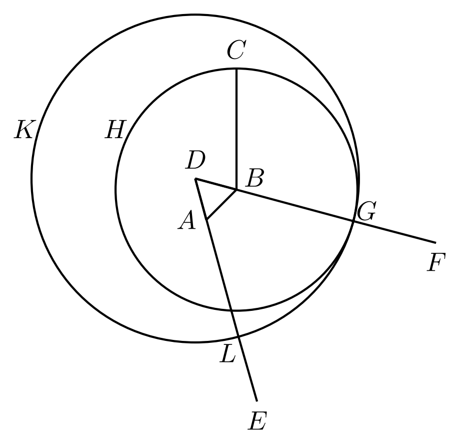
$$\overline{AB} \cong \overline{BC} \quad \text{perchè raggi della circonferenza } ACE \text{ [Def. 15]}$$

Ma, cose uguali a un'altra medesima sono uguali [Nozioni comuni 1]. Dunque $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ e i tre segmenti $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ sono tra loro congruenti. Il triangolo ABC è pertanto equilatero e risulta costruito sul dato segmento $\overline{AB}$. ∎

1.2 Proposizione 2 - 3. Trasporto e sottrazione di segmenti.

Proposizione 2.

Porre sul punto dato un segmento uguale al segmento dato.



Sia infatti stata congiunta dal punto A fino al punto B una retta AB, e sia stato costruito su di essa un triangolo equilatero DAB, e siano state prolungate in linea retta con DA, DB rette AE, BF, e con centro B e intervallo BC sia stato tracciato un cerchio GHC e di nuovo con centro D e intervallo DG sia stato tracciato un cerchio GLK.

Poichè dunque il punto B è centro del cerchio GHC, BC è uguale a BG. Di nuovo, poichè il punto D è centro del cerchio GLK, DL è uguale a DG, delle quali DA è uguale a DB. AL restante è quindi uguale a BG restante. E fu anche dimostrata BC uguale a BG: una e l'altra delle AL, BC è quindi uguale a BG. E gli uguali allo stesso sono anche uguali tra loro: anche AL è quindi uguale a BC. Risulta quindi posta sul punto dato A una retta AL uguale alla retta data BC: il che si doveva fare.

Proposizione 2.

Dato il segmento $\overline{BC}$ e il punto A, tracciare un segmento di estremo A e lunghezza pari a $\overline{BC}$.

Ipotesi: segmento $\overline{BC}$; punto A.

Tesi: $\overline{AL} \cong \overline{BC}$.

Dimostrazione.

Si congiunga il punto A con B [Postulato 1] e si costruisca il triangolo equilatero di lato $\overline{AB}$ [Proposizione 1]. Si tracci la circonferenza di centro B e raggio $\overline{BC}$ [Postulato 3]; essa incontra in G il prolungamento del lato DB. Si tracci la circonferenza di centro D e raggio $\overline{DG}$ [Postulato 3].

Si ha:

$\overline{BC} \cong \overline{BG}$ e $\overline{DL} \cong \overline{DG}$ perchè raggi di una medesima circonferenza [Def. 15].

$\overline{AD} \cong \overline{DB}$ perchè lati del triangolo equilatero ABD.

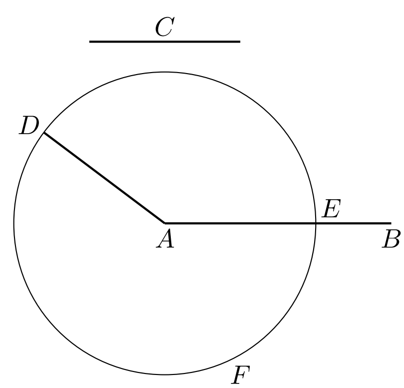
Quindi

$$\begin{aligned} \overline{AL} &\cong \overline{DL} - \overline{AD} \quad \text{(differenza di segmenti)} \\ &\cong \overline{DG} - \overline{DB} \quad \text{(perchè } \overline{DL} \cong \overline{DG}\text{, e } \overline{AD} \cong \overline{DB}\text{)} \\ &\cong \overline{BG} \end{aligned}$$

Riassumendo, $\overline{AL} \cong \overline{BG}$ e $\overline{BC} \cong \overline{BG}$. Poichè cose uguali a un'altra medesima sono uguali [Nozioni comuni 1] si deduce che: $\overline{AL} \cong \overline{BC}$. ∎

Proposizione 3.

Di due segmenti disuguali dati, sottrarre dal maggiore un segmento uguale al minore.



Siano le due rette disuguali date AB, C, maggiore delle quali sia AB: si deve pertanto sottrarre dalla maggiore AB una retta uguale alla minore C.

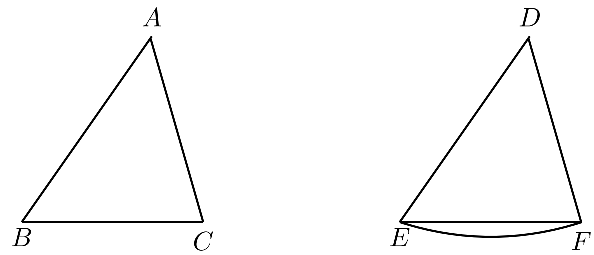
Sia stata posta sul punto A uguale alla retta C una retta AD; e con centro A e intervallo AD sia stato tracciato un cerchio DEF. E poichè il punto A è centro del cerchio DEF, AE è uguale a AD; ma anche C è uguale a AD. Una e l'altra delle AE, C è quindi uguale a AD: così che anche AE è uguale a C.

Di due rette disuguali date AB, C, risulta quindi sottratta dalla maggiore AB una retta AE uguale alla minore C: il che si doveva fare.

1.3 Proposizione 4. Primo criterio di congruenza dei triangoli.

Proposizione 4.

Qualora due triangoli abbiano i due lati rispettivamente uguali ai due lati, e abbiano anche l'angolo, quello compreso dalle rette uguali, uguale all'angolo, avranno anche la base uguale alla base, e il triangolo sarà uguale al triangolo, e i restanti angoli, sotto cui si tendono i lati uguali, saranno rispettivamente uguali ai restanti angoli.



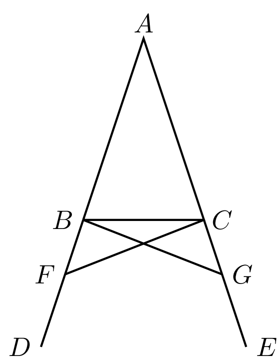
Siano ABC e DEF due triangoli che hanno i due lati AB, AC rispettivamente uguali ai due lati DE e DF, [...], e un angolo BAC uguale a un angolo EDF. Dico che anche BC come base è uguale a EF come base, e il triangolo ABC sarà uguale al triangolo DEF, e i restanti angoli, sotto cui si tendono i lati uguali, saranno rispettivamente uguali ai restanti angoli, ABC a DEF, ACB a DFE.

Sovrapposto infatti il triangolo ABC al triangolo DEF e posto il punto A sul punto D e la retta AB su DE, anche il punto B si sovrapporrà a E per il fatto di essere AB uguale a DE; sovrappostosi ora AB a DE anche la retta AC si sovrapporrà a DF per il fatto di essere l'angolo BAC uguale a EDF: così che anche il punto C si sovrapporrà al punto F per il fatto di nuovo di essere AC uguale a DF. Ma a dire il vero anche B risultava sovrapporsi a E : così che BC come base si sovrapporrà a EF come base. Se infatti, sovrappostisi B a E e C a F, la base BC non si sovrapporrà a EF, due rette comprenderanno un dominio; il che è impossibile. La base BC si sovrapporrà quindi a EF e sarà uguale a essa: così che anche il triangolo ABC totale si sovrapporrà al triangolo DEF totale e sarà uguale a esso, e i restanti angoli si sovrapporranno ai restanti angoli e saranno uguali a essi, ABC a DEF e ACB a DFE. [...] il che si doveva dimostrare.

1.4 Proposizione 5 - 6. Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali e viceversa.

Proposizione 5.

Gli angoli sulla base dei triangoli isosceli sono uguali tra loro, e, prolungate avanti le rette uguali, gli angoli sotto la base saranno uguali tra loro.



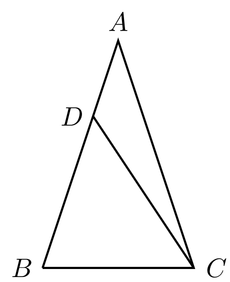
Sia un triangolo isoscele ABC che ha il lato AB uguale al lato AC e siano state prolungate avanti in linea retta con AB e AC rette BD e CE: dico che l'angolo ABC è uguale a ACB e CBD a BCE.

Sia infatti stato preso su BD un punto come capita F, e sia stata sottratta dalla maggiore AE una retta AG uguale alla minore AF, e siano state congiunte le rette FC, GB. Poichè dunque AF è uguale a AG e AB a AC, due rette FA, AC sono pertanto rispettivamente uguali a due GA, AB; e comprendono un angolo comune FAG: FC come base è quindi uguale a GB come base, e il triangolo AFC sarà uguale al triangolo AGB [...]. E poichè AF totale è uguale a AG totale, delle quali AB è *uguale a AC, quindi BF restante è uguale a CG restante. [...] Il triangolo BFC sarà quindi uguale al triangolo CGB, e i restanti angoli, sotto cui si tendono i lati uguali, saranno rispettivamente uguali ai restanti angoli: FBC è quindi uguale a GCB, e BCF a CBG. Poichè dunque l'angolo ABG totale fu dimostrato uguale all'angolo ACF totale, dei quali CBG è uguale a BCF, ABC restante è quindi uguale a ACB restante; e sono angoli sulla base del triangolo ABC. E fu anche dimostrato FBC uguale a GCB; e sono sotto la base.*

Gli angoli sulla base dei triangoli isosceli sono quindi uguali tra loro, e, prolungate avanti le rette uguali, gli angoli sotto la base saranno uguali tra loro: il che si doveva dimostrare.

Proposizione 6.

Qualora due angoli di un triangolo siano uguali tra loro, anche i lati che si tendono sotto gli angoli uguali saranno uguali tra loro.



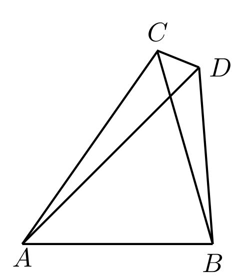
Sia un triangolo ABC che ha l'angolo ABC uguale all'angolo ACB: dico che anche un lato AB è uguale a un lato AC. Se infatti AB è disuguale a AC, l'uno o l'altro di essi è maggiore. Sia maggiore AB, e sia stata sottratta dalla maggiore AB una retta DB uguale alla minore AC, e sia stata congiunta DC.

Poichè dunque DB è uguale a AC e BC comune, due rette DB, BC sono pertanto rispettivamente uguali a due AC, CB, e un angolo DBC è uguale a un angolo ACB: DC come base è quindi uguale a AB come base, e il triangolo DBC sarà uguale al triangolo ACB, il minore al maggiore; il che è assurdo: non si dà quindi il caso che AB sia disuguale a AC: è quindi uguale. Qualora quindi i due angoli di un triangolo siano uguali tra loro, anche i lati che si tendono sotto gli angoli uguali saranno uguali tra loro: il che si doveva dimostrare.

1.5 Proposizione 7 - 8. Terzo criterio di congruenza dei triangoli.

Proposizione 7.

Sulla stessa retta altre due rette rispettivamente uguali alle stesse due rette e che hanno gli stessi limiti delle due rette in origine non saranno costruite verso punti differenti dalla stessa parte.



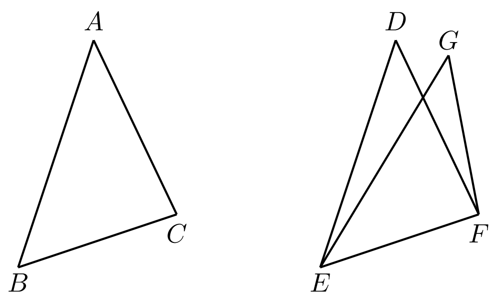
Proposizione 7.

Sono dati il segmento $\overline{AB}$ e i segmenti $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ che si intersecano nel punto C. È impossibile trovare altri due segmenti $\overline{AD}$, $\overline{BD}$ rispettivamente uguali a $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ che si intersecano in un punto $D \neq C$, situato nel semipiano individuato da AB contenente C.

Si tralascia la dimostrazione.

Proposizione 8.

Qualora due triangoli abbiano i due lati rispettivamente uguali ai due lati, e abbiano anche la base uguale alla base, avranno anche l'angolo compreso dalle rette uguali uguale all'angolo.



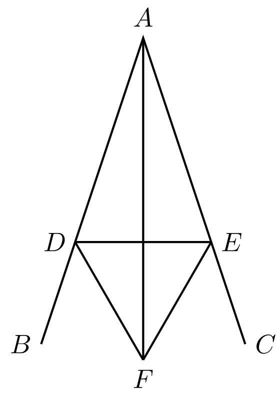
Siano due triangoli ABC, DEF che hanno i due lati AB, AC rispettivamente uguali ai due lati DE, DF [...] e abbiano anche BC come base uguale EF come base: dico che anche un angolo BAC è uguale a un angolo EDF.

Sovrapposto infatti il triangolo ABC al triangolo DEF e posto il punto B sul punto E e la retta BC su EF, anche il punto C si sovrapporrà a F per il fatto di essere BC uguale a EF; sovrappostasi ora BC a EF anche BA, CA si sovrapporranno a ED, DF. Se infatti BC come base si sovrapporrà a EF come base, e i lati BA, AC non si sovrapporranno a ED, DF ma si discosteranno come EG, GF, sulla stessa retta altre due rette rispettivamente uguali alle stesse due rette e che hanno gli stessi limiti saranno state costruite verso punti differenti dalla stessa parte. E non si costruiscono [Prop. 7]: non si darà quindi il caso che, sovrapposta la base BC alla base EF, i lati BA, AC non si sovrappongano a ED, DF. Quindi si sovrapporranno: così che anche un angolo BAC si sovrapporrà a un angolo EDF e sarà uguale a esso. [...] il che si doveva dimostrare.

1.6 Proposizione 9 - 10. Bisettrice di un angolo e punto medio di un segmento.

Proposizione 9.

Secare a metà l'angolo dato.



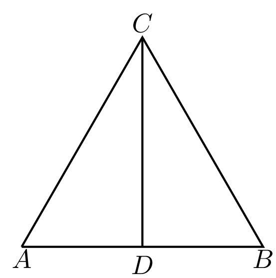
Sia l'angolo rettilineo dato BAC. Si deve pertanto secarlo a metà .

Sia stato preso su AB un punto come capita D, e da AC sia stata sottratta una retta AE uguale a AD, e sia stata congiunta DE, e sia stato costruito su DE un triangolo equilatero DEF, e sia stata congiunta AF: dico che l'angolo BAC risulta secato a metà dalla retta AF.

Poichè infatti AD è uguale a AE, e AF comune, due rette DA, AF sono pertanto rispettivamente uguali a due EA, AF. E DF come base è uguale a EF come base: un angolo DAF è quindi uguale a un angolo EAF. L'angolo dato BAC risulta quindi secato a metà dalla retta AF: il che si doveva fare.

Proposizione 10.

Secare a metà la retta limitata data.



Sia la retta limitata data AB: si deve pertanto secare a metà la retta limitata AB.

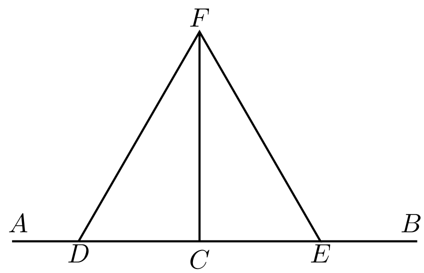
Sia stato costruito su di essa un triangolo equilatero ABC, e sia stato secato l'angolo ACB a metà con la retta CD: dico che la retta AB risulta secata a metà secondo il punto D.

Poichè infatti AC è uguale a CB, e CD comune, due rette AC, CD sono pertanto rispettivamente uguali a due BC, CD; e un angolo ACD è uguale a un angolo BCD: AD come base è quindi uguale a BD come base. La retta limitata data AB risulta quindi secata a metà secondo D: il che si doveva fare.

1.7 Proposizione 11 - 12. Costruzione della perpendicolare condotta da un punto a una retta.

Proposizione 11.

Condurre una linea retta ad angoli retti con la retta data dal punto dato su di essa.



Sia la retta data AB, il punto dato su di essa C: si deve pertanto condurre dal punto C ad angoli retti con la retta AB una linea retta.

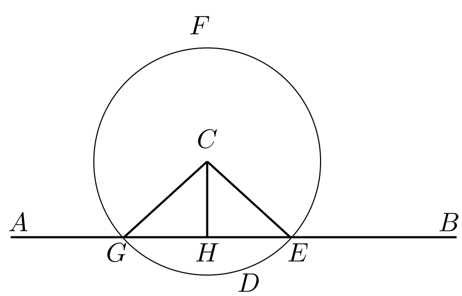
Sia stato preso su AC un punto come capita D, e uguale a CD sia stata posta CE, e sia stato costruito su DE un triangolo equilatero FDE, e sia stata congiunta FC: dico che una linea retta FC risulta condotta ad angoli retti con la retta data AB dal punto dato C su di essa.

Poichè infatti DC è uguale a CE, e CF comune, due rette DC, CF sono pertanto rispettivamente uguali a due EC, CF; e DF come base è uguale a FE come base: un angolo DCF è quindi uguale a un angolo ECF; e sono consecutivi. E quando una retta che sta su una retta faccia gli angoli consecutivi uguali tra loro, uno e l'altro degli angoli uguali è retto: uno e l'altro dei DCF, FCE è quindi retto.

Una linea retta FC risulta quindi condotta ad angoli retti con la retta data AB dal punto dato C su di essa: il che si doveva fare.

Proposizione 12.

Condurre una linea retta perpendicolare alla retta illimitata data dal punto dato, che non è su di essa.



Sia la retta illimitata data AB, il punto dato, che non è su di essa, C: si deve pertanto condurre una linea retta perpendicolare alla retta illimitata data AB dal punto dato C, che non è su di essa.

Sia infatti stato preso dall'altra parte della retta AB un punto come capita D, e con centro C e intervallo CD sia stato tracciato un cerchio EFG, e sia stata secata la retta EG a metà secondo H, e siano state congiunte le rette CG, CH, CE: dico che risulta condotta una retta CH perpendicolare alla retta illimitata data AB dal punto dato C, che non è su di essa.

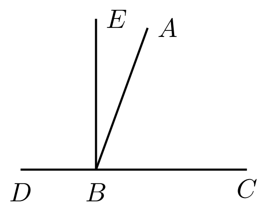
Poichè infatti GH è uguale a HE, e HC comune, due rette GH, HC sono pertanto rispettivamente uguali a due EH, HC; e CG come base è uguale a CE come base: un angolo CHG è quindi uguale a un angolo EHC; e sono consecutivi. E quando una retta che sta su una retta faccia gli angoli consecutivi uguali tra loro, uno e l'altro degli angoli uguali è retto, e la retta che sta su è chiamata perpendicolare a quella su cui sta.

Risulta quindi condotta una retta CH perpendicolare alla retta illimitata data AB dal punto dato C, che non è su di essa: il che si doveva fare.

1.8 Proposizione 13. La somma di due angoli adiacenti è uguale a due retti.

Proposizione 13.

Qualora una retta che sta su una retta faccia angoli, farà o due angoli retti, oppure uguali a due retti.



Una certa retta AB che sta su una retta CD faccia infatti angoli CBA, ABD: dico che gli angoli CBA, ABD sono due retti oppure uguali a due retti.

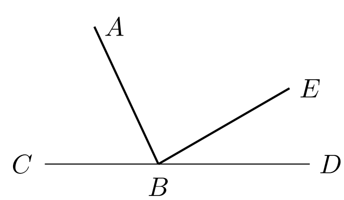
Se dunque CBA è uguale a ABD, sono retti. Se invece no, sia stata condotta dal punto B ad angoli retti con la retta CD una retta BE: CBE, EBD sono quindi due retti; e poichè CBE è uguale ai due CBA, ABE, sia stato sommato EBD comune: CBE, EBD sono quindi uguali ai tre CBA, ABE, EBD. Di nuovo, poichè DBA è uguale ai due DBE, EBA, sia stato sommato ABC comune: DBA, ABC sono quindi uguali ai tre DBE, EBA, ABC. E furono anche dimostrati CBE, EBD uguali agli stessi tre - e gli uguali allo stesso sono anche uguali tra loro - : anche CBE, EBD sono quindi uguali a DBA, ABC; ma CBE, EBD sono uguali a due retti: anche DBA, ABC sono quindi uguali a due retti.

Qualora quindi una retta che sta su una retta faccia angoli, farà o due angoli retti oppure uguali a due retti: il che si doveva dimostrare.

1.9 Proposizione 14. Se la somma di due angoli consecutivi è uguale a due retti allora gli angoli sono adiacenti.

Proposizione 14.

Qualora, su una certa retta e su un punto su di essa, due rette che sono poste non dalla stessa parte facciano gli angoli consecutivi uguali a due retti, le rette saranno in linea retta tra loro.



Su una certa retta AB e su un punto su di essa B, due rette BC, BD che sono poste non dalla stessa parte facciano infatti gli angoli consecutivi ABC, ABD uguali a due retti: dico che BD è in linea retta con CB.

Se infatti BD non è in linea retta con BC, sia BE in linea retta con CB.

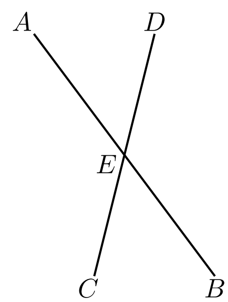
Poichè dunque una retta AB sta su una retta CBE, gli angoli ABC, ABE sono quindi uguali a due retti; e sono anche ABC, ABD uguali a due retti: CBA, ABE sono quindi uguali a CBA, ABD. Sia stato sottratto CBA comune: ABE restante è quindi uguale a ABD restante, il minore al maggiore; il che è impossibile. Non si dà quindi il caso che BE sia in linea retta con CB. Del tutto similmente dimostreremo che neanche una certa altra eccetto BD: CB è quindi in linea retta con BD.

Qualora quindi, su una certa retta e su un punto su di essa, due rette che sono poste non dalla stessa parte facciano gli angoli consecutivi uguali a due retti, le rette saranno in linea retta tra loro: il che si doveva dimostrare.

1.10 Proposizione 15. Angoli opposti al vertice sono uguali.

Proposizione 15.

Qualora due rette si sechino tra loro, fanno gli angoli al vertice uguali tra loro.



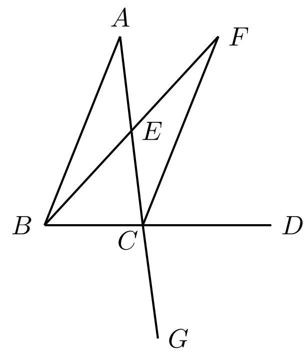
Due rette AB e CD si sechino infatti tra loro secondo il punto E: dico che l'angolo AEC è uguale a DEB, e CEB uguale a AED.

Poichè infatti una retta AE sta su una retta CD facendo angoli CEA, AED, CEA, AED gli angoli sono quindi uguali a due retti. Di nuovo, poichè una retta DE sta su una retta AB facendo angoli AED, DEB, gli angoli AED, DEB sono quindi uguali a due retti. E furono anche dimostrati CEA, AED uguali a due retti: CEA, AED sono quindi uguali a AED, DEB. Sia stato sottratto AED comune: CEA restante è quindi uguale a BED restante; del tutto similmente sarà dimostrato che anche CEB, DEA sono uguali. [...] il che si doveva dimostrare.

1.11 Proposizione 16. In un triangolo ogni angolo esterno è maggiore degli angoli interni non adiacenti ad esso.

Proposizione 16.

Prolungato avanti uno solo dei lati di ogni triangolo, l'angolo all'esterno è maggiore di uno e dell'altro degli angoli all'interno e opposti.



Sia un triangolo ABC, e sia stato prolungato avanti un suo lato BC fino a D: dico che l'angolo all'esterno ACD è maggiore di uno e dell'altro degli angoli all'interno e opposti CBA e BAC.

Sia stata secata AC a metà secondo E, e congiunta BE sia stata prolungata in linea retta fino a F, e uguale a BE sia stata posta EF, e sia stata congiunta FC, e sia stata condotta oltra AC fino a G.

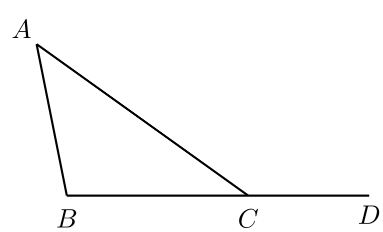
Poichè dunque AE è uguale a EC, e BE a EF, due rette AE, EB, sono pertanto rispettivamente uguali a due CE, EF; e un angolo AEB è uguale a un angolo FEC - sono infatti al vertice -: AB come base è quindi uguale a FC come base, e il triangolo ABE è uguale al triangolo FEC, e i restanti angoli, sotto cui si tendono i lati uguali, sono rispettivamente uguali ai restanti angoli: BAE, è quindi uguale a EFC. E ECD è maggiore di ECF: ACD è quindi maggiore di BAE. Del tutto similmente, secata a metà BC, BCG, cioè ACD, sarà dimostrato maggiore anche di ABC.

Prolungato avanti uno dei lati di ogni triangolo, l'angolo all'esterno è quindi maggiore di uno e dell'altro degli angoli all'interno e opposti: il che si doveva dimostrare.

1.12 Proposizione 17. In un triangolo la somma di due angoli interni è minore di due angoli retti.

Proposizione 17.

Prolungato avanti uno solo dei lati di ogni triangolo, l'angolo all'esterno è maggiore di uno e dell'altro degli angoli all'interno e opposti.



Sia un triangolo ABC: dico che due angoli sostituiti in ogni modo del triangolo ABC sono minori di due retti.

Sia infatti stata prolungata BC fino a D. E poichè è un angolo ACD all'esterno di un triangolo ABC, è maggiore di un interno e opposto ABC. Sia stato sommato ACB comune: ACD, ACB sono quindi maggiori di ABC, BCA. Ma ACD, ACB sono uguali a due retti: ABC, BCA sono quindi minori di due retti. Del tutto similmente dimostreremo che anche BAC, ACB sono minori di due retti, e ancora CAB, ABC.

Due angoli sostituiti in ogni modo di ogni triangolo sono quindi minori di due retti: il che si doveva dimostrare.

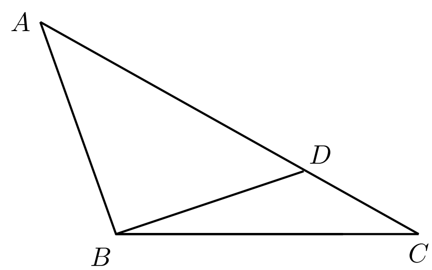
Osservazione.

La proposizione 17 costituisce l'inversa del Postulato 5: in sostanza essa afferma che se due rette r e s, tagliate da una terza retta t, si intersecano, allora la somma degli angoli che r e s formano con t è sempre minore di due retti. Da ciò segue che in un triangolo due angoli sono sempre acuti.

1.13 Proposizione 18 - 19. In un triangolo al lato maggiore è opposto l'angolo maggiore e viceversa.

Proposizione 18.

Il lato maggiore di ogni triangolo sottende l'angolo maggiore.



Sia infatti un triangolo ABC che ha un lato AC maggiore di AB: dico che anche un angolo ABC è maggiore di BCA.

Poichè infatti AC è maggiore di AB, uguale a AB sia stata posta AD, e sia stata congiunta BD.

E poichè è un angolo ADB all'esterno di un triangolo BCD, è maggiore di un interno e opposto DCB; e ADB è uguale a ABD, poichè anche un lato AB è uguale a AD: anche ABD è quindi maggiore di ACB: ABC è quindi di molto maggiore di ACB.

Il lato maggiore di ogni triangolo sottende quindi l'angolo maggiore: il che si doveva dimostrare.

Proposizione 19.

Sotto l'angolo maggiore di ogni triangolo si tende il lato maggiore.

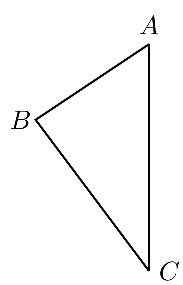


Figura 1

Sia un triangolo ABC che ha un angolo ABC maggiore di BCA: dico che anche un lato AC è maggiore di un lato AB.

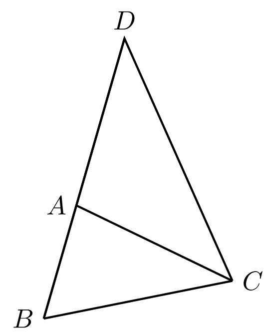
Se infatti no, o AC è uguale a AB oppure minore; dunque AC non è uguale a AB: anche un angolo ABC sarebbe infatti uguale a ACB; e non è: non si dà quindi il caso che AC sia uguale a AB. Né a dire il vero AC è minore di AB: anche un angolo ABC sarebbe infatti minore di ACB; e non è: non si dà quindi il caso che AC sia minore di AB. E fu dimostrato che neanche è uguale. AC è quindi maggiore di AB.

Sotto l'angolo maggiore di ogni triangolo si tende quindi il lato maggiore: il che si doveva dimostrare.

1.14 Proposizione 20. In un triangolo un lato è minore della somma degli altri due.

Proposizione 20.

Due lati sostituiti in ogni modo di ogni triangolo sono maggiori del restante.



Sia infatti un triangolo ABC: dico che due lati sostituiti in ogni modo del triangolo ABC sono maggiori del restante, BA, AC di BC, e AB, BC di AC, e BC, CA di AB.

Sia infatti stata condotta oltre BA fino al punto D, e uguale a CA sia stata posta AD, e sia stata congiunta DC.

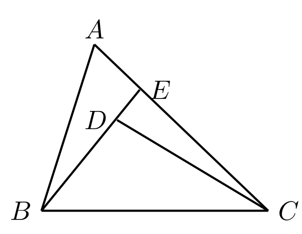
Poichè dunque DA è uguale a AC, anche un angolo ADC è uguale a ACD: BCD è quindi maggiore di ADC; e poichè è un triangolo DCB che ha un angolo BCD maggiore di BDC, e sotto l'angolo maggiore si tende il lato maggiore, DB è quindi maggiore di BC; del tutto similmente dimostreremo che anche AB, BC sono maggiori di CA, e BC, CA di AB.

Due lati sostituiti in ogni modo di ogni triangolo sono quindi maggiori del restante: il che si doveva dimostrare.

1.15 Proposizione 21

Proposizione 21.

Qualora due rette siano costruite all'interno di un triangolo su uno solo dei lati e dai suoi limiti, le rette costruite saranno minori dei restanti due lati del triangolo, e comprenderanno un angolo maggiore.



Due rette BD, DC siano infatti state costruite all'interno di un triangolo ABC su uno solo dei lati BC e dai limiti B, C: dico che BD, DC sono minori dei restanti due lati BA, AC del triangolo, e comprendono un angolo BDC maggiore di BAC.

Sia infatti stata condotta oltre BD fino a E. E poiché due lati di ogni triangolo sono maggiori del restante, i due lati AB, AE del triangolo ABE sono quindi maggiori di BE; sia stata sommata EC comune: BA, AC sono quindi maggiori di BE, EC. Di nuovo, poiché i due lati CE, ED del triangolo CED sono maggiori di CD, sia stata sommata DB comune: CE, EB sono quindi maggiori di CD, DB. Ma maggiori di BE, EC sono stati dimostrati BA, AC: BA, AC sono quindi di molto maggiori di BD, DC.

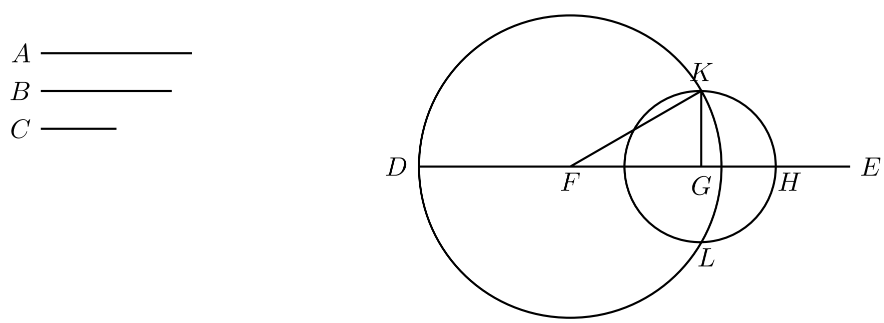
Di nuovo, poiché un angolo all'esterno di ogni triangolo è maggiore di quello all'interno e opposto, l'angolo all'esterno BDC del triangolo CDE è quindi maggiore di CED. Per gli stessi motivi invero anche l'angolo all'esterno CEB del triangolo ABE è maggiore di BAC. Ma maggiore di CEB fu dimostrato BDC: BDC è quindi di molto maggiore di BAC.

Qualora quindi due rette siano costruite all'interno di un triangolo su uno solo dei lati e dai suoi limiti, le rette costruite sono minori dei restanti due lati del triangolo, e comprenderanno un angolo maggiore: il che si doveva dimostrare.

1.16 Proposizione 22. Costruzione del triangolo di lati assegnati.

Proposizione 22.

Costruire un triangolo da tre rette che sono uguali alle tre rette date [...]



Siano le tre rette date A, B, C, due delle quali sostituite in ogni modo siano maggiori della restante, A, B di C, e A, C di B e ancora B, C di A: si deve pertanto costruire un triangolo dalle rette uguali a A, B, C.

Sia stata fissata una certa retta DE, limitata secondo D e illimitata secondo E, e uguale a A sia stata posta DF, uguale a B FG, uguale a C GH; e con centro F e intervallo FD sia stato tracciato un cerchio DKL; di nuovo, con centro G e intervallo GH sia stato tracciato un cerchio KHL, e siano state congiunte KF, KG: dico che da tre rette uguali a A, B, C risulta costruito un triangolo KFG.

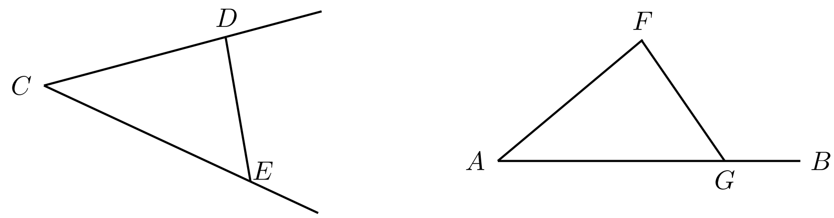
Poichè infatti il punto F è centro del cerchio DKL, FD è uguale a FK; ma FD è uguale a A. Anche KF è quindi uguale a A. Di nuovo, poichè il punto G è centro del cerchio LKH, GH è uguale a GK; ma GH è uguale a C. Anche KG è quindi uguale a C. Ed è anche FG uguale a B: le tre rette KF, FG, GK sono quindi uguali alle tre A, B, C.

Un triangolo KFG risulta quindi costruito da tre rette KF, FG, GK, che sono uguali alle tre rette date A, B, C: il che si doveva fare.

1.17 Proposizione 23. Costruzione di un angolo uguale a un angolo dato.

Proposizione 23.

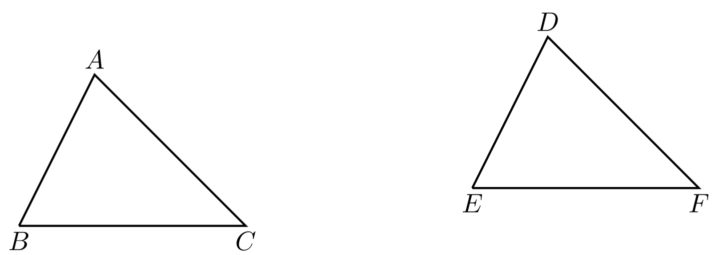
Costruire, sulla retta data e su un punto su di essa, un angolo rettilineo uguale all'angolo rettilineo dato.



1.18 Proposizione 26. Secondo criterio di congruenza dei triangoli.

Proposizione 26.

Qualora due triangoli abbiano due angoli rispettivamente uguali a due angoli e un solo lato, o quello agli angoli uguali oppure quello che si tende sotto uno solo degli angoli uguali, uguale a un solo lato, avranno anche i restanti lati rispettivamente uguali ai restanti lati, e il restante angolo al restante angolo.



Siano due triangoli ABC, DEF che hanno due angoli ABC, BCA rispettivamente uguali a due (angoli) DEF, EFD, (s'intende) ABC a DEF, e BCA a EFD; e abbiano anche un solo lato uguale a un solo lato, in primo luogo quello agli angoli uguali, BC a EF: dico che avranno anche i restanti lati rispettivamente uguali ai restanti lati, AB, a DE e AC a DF, e il restante angolo al restante angolo, BAC a EDF.

Se infatti AB è disuguale a DE, una sola di esse è maggiore. Sia maggiore AB, e uguale a DE sia stata posta BG, e sia stata congiunta GC.

Poichè dunque BG è uguale a DE, e BC a EF, due rette BG, BC sono pertanto rispettivamente uguali a due DE, EF; e un angolo GBC è uguale a un angolo DEF: HC come base è quindi uguale a DF come base, e il triangolo GBC è uguale al triangolo DEF, e i restanti angoli, sotto cui si tendono i lati uguali, saranno uguali ai restanti angoli: l'angolo GBC è quindi uguale a DFE. Ma DFE è stato supposto uguale a BCA: anche BCG è quindi uguale a BCA, il minore al maggiore; il che è impossibile. Non si dà quindi il caso che AB sia disuguale a DE. È quindi uguale. Ed è anche BC uguale a EF: due rette AB, BC sono pertanto rispettivamente uguali a due DE, EF; e un angolo ABC è uguale a un angolo DEF: AC come base è quindi uguale a DF come base, e un angolo BAC restante è uguale al restante angolo EDF.

Ma ora di nuovo siano uguali i lati che si tendono sotto gli angoli uguali, come AB a DE: dico di nuovo che anche i restanti lati saranno uguali ai restanti lati, AC a DF, e BC a EF, e ancora il restante angolo BAC è uguale al restante angolo EDF.

Se infatti BC è disuguale a EF, una sola di esse è maggiore . Sia maggiore, se possibile, BC, e uguale a EF sia stata posta BH, e sia stata congiunta AH. E poiché BH è uguale a EF, e AB a DE, due rette AB, BH sono pertanto rispettivamente uguali a due DE, EF; e comprendono angoli uguali: AH come base è quindi uguale a DF come base, e il triangolo ABH è uguale al triangolo DEF, e i restanti angoli, sotto cui si tendono i lati uguali, saranno uguali ai restanti angoli: l'angolo BHA è quindi uguale a EFD. Ma EFD è uguale a BCA: un angolo all'esterno BHA di un triangolo AHC è pertanto uguale a un angolo all'interno e opposto BCA; il che è impossibile. Non si dà quindi il caso che BC sia disuguale a EF: è quindi uguale.

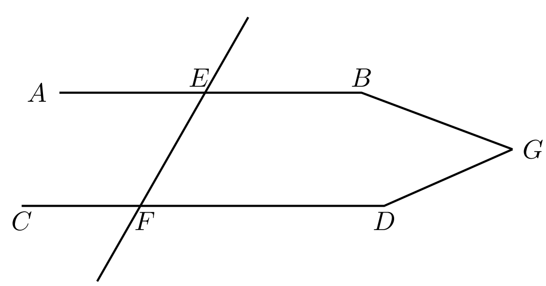
Ed è anche AB uguale DE: due rette AB, BC sono pertanto rispettivamente uguali a due DE, EF; e comprendono angoli uguali: AC come base è quindi uguale a DF come base, e il triangolo ABC uguale al triangolo DEF e un angolo BAC restante uguale al restante EDF.

Qualora due triangoli abbiano due angoli rispettivamente uguali a due angoli e un solo lato, o quello agli angoli uguali oppure quello che si tende sotto uno solo degli angoli uguali, uguale a un solo lato, avranno anche i restanti lati uguali ai restanti lati, e il restante angolo al restante angolo: il che si doveva dimostrare.

1.19 Proposizione 27 - 28. Se due rette tagliate da una trasversale formano angoli alterni interni (esterni) uguali allora sono parallele.

Proposizione 27.

Qualora una retta che incide su due rette faccia gli angoli alterni uguali tra loro, le rette saranno parallele tra loro.



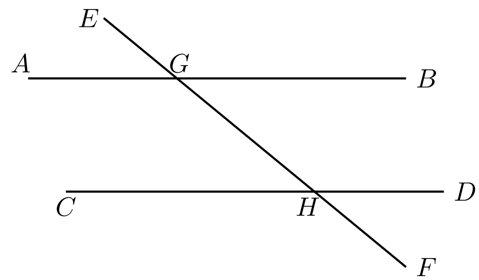
Una retta EF che incide su due rette AB, CD faccia infatti gli angoli alterni AEF, EFD uguali tra loro: dico che AB è parallela a CD.

Se infatti no, AB, CD prolungate si incontreranno o dalla parte B, D oppure da quella A, C. Siano state prolungate e si incontrino dalla parte B, D secondo G. Un angolo all'esterno AEF di un triangolo GEF è pertanto uguale a un angolo all'interno e opposto EFG; il che è impossibile. Non si darà quindi il caso che AB, CD prolungate si incontrino dalla parte B, D. Del tutto similmente sarà dimostrato che neanche da quella A, C; e le (rette) che non si incontrano nè da una nè dall'altra parte sono parallele: AB è quindi parallela a CD.

Qualora quindi una retta che incide su due rette faccia gli angoli alterni uguali tra loro, le rette saranno parallele: il che si doveve dimostrare.

Proposizione 28.

Qualora una retta che incide su due rette faccia un angolo all'esterno uguale a quello all'interno e opposto e dalla stessa parte o quelli all'interno e dalla stessa parte uguali a due retti, le rette saranno parallele tra loro.



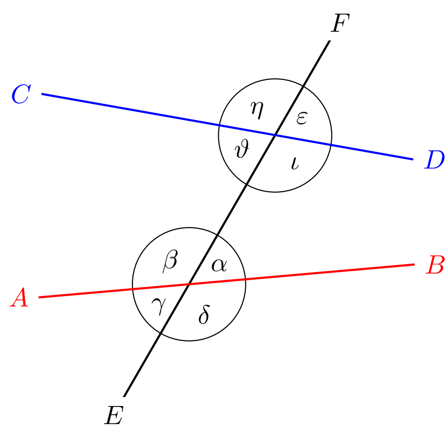
Una retta EF che incide su due rette AB, CD faccia infatti un angolo all'esterno EGB ugualaquello all'interno e opposto GHD o quelli all'interno e dalla stessa parte BGH, GHD uguali a due retti: dico che AB è parallela a CD.

Poichè infatti EGB è uguale a GHD, ma EGB è uguale a AGH, anche AGH è quindi uguale a GHD; e sono alterni: AB è quindi parallela a CD.

Di nuovo, poichè BGH, GHD sono uguali a due retti, e sono anche AGH, BGH uguali a due retti, AGH, BGH sono quindi uguali a BGH, GHD; sia stato sottratto BGH comune: AGH restante è quindi uguale a GHD restante; e sono alterni: AB è quindi parallela a CD.

Qualora una retta che incide su due rette faccia quindi un angolo all'esterno uguale a quello all'interno e opposto e dalla stessa parte o quelli all'interno e dalla stessa parte uguali a due retti, le rette saranno parallele: il che si doveva dimostrare.

Denominazione degli angoli formati da due rette tagliate da una trasversale.

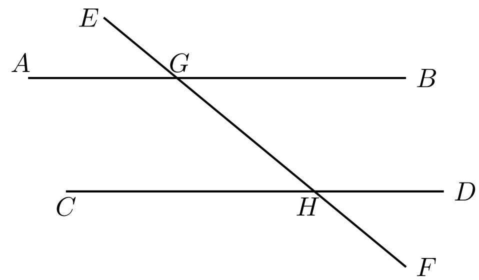


Le rette AB and CD formano:
due coppie di angoli *alterni interni*: (α, ϑ), (β, ι);
due coppie di angoli *alterni esterni* (δ, η), (γ, ε);
due coppie di angoli *coniugati interni* (α, ι), (β, ϑ);
due coppie di angoli *coniugati esterni* (δ, ε), (γ, η);
quattro coppie di angoli *corrispondenti* (α, ε), (β, η), (δ, ι), (γ, ϑ).

1.20 Proposizione 29

Proposizione 29.

Una retta che incide su rette parallele fa sia gli angoli alterni uguali tra loro che quello all'esterno uguale all'interno e opposto che quelli all'interno e dalla stessa parte uguali a due retti.



Una retta EF incida infatti su rette parallele AB, CD: dico che fa gli angoli alterni AGH, GHD uguali e l'angolo all'esterno EGB uguale all'interno e opposto GHD e quelli all'interno e dalla stessa parte BGH, GHD uguali a due retti.

Se infatti AGH è disuguale a GHD, uno solo di essi è maggiore. Sia maggiore AGH; sia stato sommato BGH comune: AGH, BGH sono quindi maggiori di BGH, GHD. Ma AGH, BGH sono uguali a due retti. [E] BGH, GHD sono quindi minori di due retti. E le rette prolungate illimitatamente da meno di due retti si incontrano: quindi AB, CD prolungate illimitatamente si incontrano; e non si incontrano per il fatto di essere state supposte parallele: non si dà quindi il caso che AGH sia disuguale a GHD: è quindi uguale. Ma AGH è uguale a EGB: anche EGB è quindi uguale a GHD. Sia stato sommato BGH comune: EGB, BGH sono quindi uguali a BGH, GHD. Ma EGB, BGH sono uguali a due retti: anche BGH, GHD sono quindi uguali a due retti.

Una retta che incide su rette parallele fa quindi sia gli angoli alterni uguali tra loro che quello all'esterno uguale all'interno e opposto che quelli all'interno e dalla stessa parte uguali a due retti:il che si doveva dimostrare.

2 Guida ragionata ai contenuti del Libro I

Costruzioni geometriche fondamentali	
Triangolo equilatero	Proposizione 1
Trasporto e sottrazione di segmenti	Proposizione 2-3
Bisettrice di un angolo	Proposizione 9
Punto medio di un segmento	Proposizione 10
Perpendicolare ad una retta data passante per un punto dato	Proposizione 11-12
Triangolo dati i lati	Proposizione 22
Trasporto di un angolo	Proposizione 23
Costruzione della parallela ad una retta data passante per un punto	Proposizione 31
Criteri di congruenza dei triangoli	
Primo criterio	Proposizione 4
Secondo criterio	Proposizione 7-8
Terzo criterio	Proposizione 26
Triangoli isosceli	
Un triangolo isoscele ha gli angoli alla base uguali	Proposizione 5
Un triangolo con due angoli uguali è isoscele	Proposizione 6
Proprietà di angoli formati da due rette incidenti	
La somma di due angoli adiacenti è uguale a due angoli retti	Proposizione 13
Angoli opposti al vertice sono uguali	Proposizione 15
Disuguaglianze relative a triangoli	
In un triangolo ogni angolo esterno è maggiore degli angoli interni non adiacenti a esso	Proposizione 16
In un triangolo la somma di due angoli interni è minore di due retti	Proposizione 17
In un triangolo al lato maggiore si oppone l'angolo maggiore e viceversa	Proposizione 18-19
In un triangolo un lato è minore della somma degli altri due	Proposizione 20
Ulteriore proprietà dei triangoli	Proposizione 21
Se due triangoli hanno due lati uguali e l'angolo compreso disuguale, il terzo lato è disuguale nello stesso senso e viceversa	Proposizione 24-25
Somma degli angoli interni di un triangolo	Proposizione 32
Teoria delle rette parallele	
Condizioni sufficienti	Proposizione 27-28
Condizione necessaria	Proposizione 29
Transitività del parallelismo	Proposizione 30
Parallelogrammi	
Esistenza e proprietà fondamentali dei parallelogrammi	Proposizione 33-34
Equivalenza di parallelogrammi e di triangoli nelle stesse parallele ??	Proposizione 35-38
Teorema di Pitagora	
Teorema di Pitagora	Proposizione 47
Inverso del teorema di Pitagora	Proposizione 48