Seno, coseno e tangente di un angolo. Prodotto vettore.

Mauro Saita

e-mail: maurosaita@tiscalinet.it

Gennaio 2016.[1]

Indice

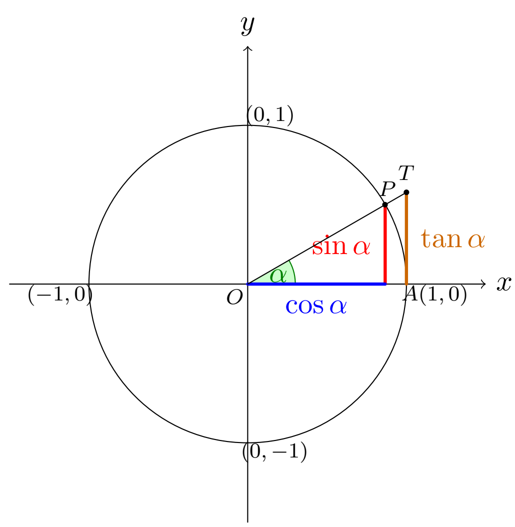
[1]Nome file: funzioni_goniometriche_prodotto_vettore_2016.tex

1 Seno, coseno e tangente di un angolo.

Fissato un sistema di assi cartesiani si tracci la circonferenza di centro O e raggio unitario e si pensi all'angolo α come all'angolo che il raggio vettore OP descrive ruotando attorno all'origine O, a partire dal semiasse positivo delle x. Si conviene di indicare con il segno $+$ gli angoli descritti da OP mediante una rotazione in senso antiorario, con il segno $-$ gli angoli ottenuti mediante una rotazione in senso inverso. In tal modo ogni raggio vettore OP individua un unico angolo $0 \leq \alpha < 360°$ e viceversa ogni angolo $0 \leq \alpha < 360°$ individua un unico raggio vettore OP.

Definizione 1.1 (Definizione di seno e coseno di un angolo.)**.** *In un sistema di assi cartesiani si consideri la circonferenza di centro O e raggio unitario e sia α l'angolo descritto dal raggio vettore OP. Si chiama* coseno di α *(si scrive* $\cos\alpha$*) l'ascissa del punto P; si chiama* seno di α *(si scrive* $\sin\alpha$*) l'ordinata di P.*

Definizione 1.2 (Definizione di tangente di un angolo.)**.** *In un sistema di assi cartesiani si consideri la circonferenza di centro O e raggio unitario e sia α l'angolo descritto dal raggio vettore OP. Si tracci la tangente alla circonferenza in $A = (1, 0)$ e si indichi con T l'intersezione di tale tangente con il prolungamento del raggio vettore OP. Si chiama* tangente di α *(si scrive* $\tan\alpha$ *oppure* $\operatorname{tg}\alpha$*) l'ordinata del punto T.*



Il seno di α è l'ordinata di P, il segmento rosso.
Il coseno di α è l'ascissa di P, il segmento blu.
La $\tan\alpha$ è l'ordinata di T, il segmento arancione.

Valgono i seguenti fatti:

- $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$
- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Figura 1: Definizione di seno, coseno e tangente dell'angolo α.

1.1 Triangoli rettangoli e funzioni trigonometriche

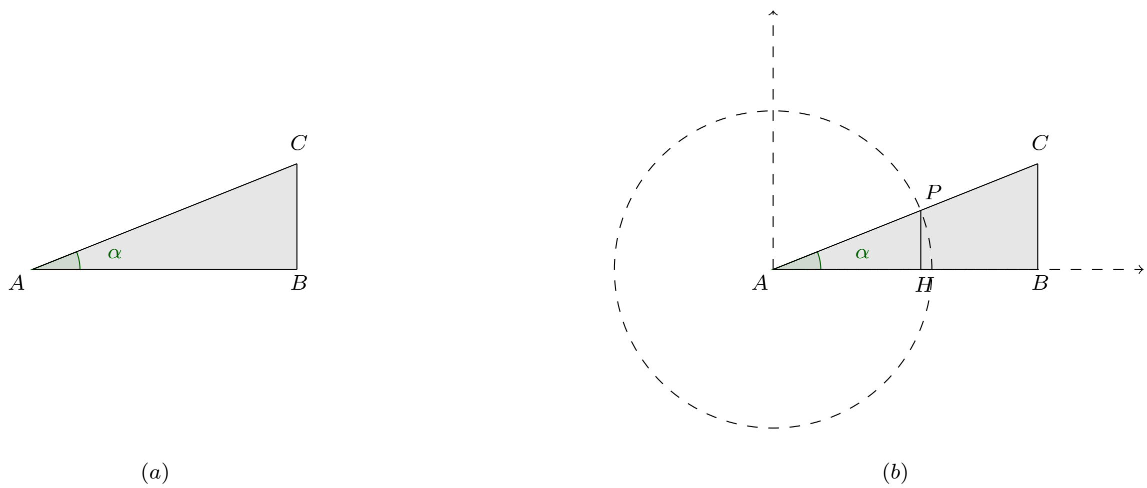


Figura 2: La circonferenza è centrata in A e ha raggio 1. Il triangolo rettangolo APH è simile al triangolo ACB.

Si consideri un triangolo rettangolo come quello mostrato in figura 2 (a). Si scelga un sistema di coordinate in modo tale che l'asse x coincida con il lato AB e l'asse y risulti passante per A e ortogonale a AB (figura 2 (b)); si tracci la circonferenza di centro A e raggio unitario. I triangoli APH e ACB sono simili

$$\cos\alpha = \frac{AH}{1} = \frac{AB}{AC} \tag{1.1}$$

$$\sin\alpha = \frac{PH}{1} = \frac{BC}{AC} \tag{1.2}$$

$$\tan\alpha = \frac{PH}{AH} = \frac{BC}{AB} \tag{1.3}$$

In molti problemi, che a diverso titolo coinvolgono un triangolo rettangolo, è utile ricordare le uguaglianze seguenti

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adiacente a } \alpha}{\text{ipotenusa}} \tag{1.4}$$

$$\sin\alpha = \frac{\text{cateto opposto a } \alpha}{\text{ipotenusa}} \tag{1.5}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opposto a } \alpha}{\text{cateto adiacente a } \alpha} \tag{1.6}$$

2 Prodotto vettore

Definizione 2.1. *Data una coppia ordinata di vettori* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *il* prodotto vettore

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

*(si legge: '*A vettore B*') è il vettore definito dalle proprietà seguenti:*

1. *La direzione di* $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ *è ortogonale sia al vettore* $\mathbf{A}$ *che al vettore* $\mathbf{B}$*.*

2. *La lunghezza di* $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ *è uguale all'area del parallelogramma generato da* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$*, vale a dire*
$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\,\sin\alpha \tag{2.1}$$
dove α*, compreso tra* 0 *e* $180°$*, è l'angolo tra i vettori* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$*.*

3. *Il verso di* $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ *(quando* $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ *non è nullo) è quello stabilito dalla "regola della mano destra".*

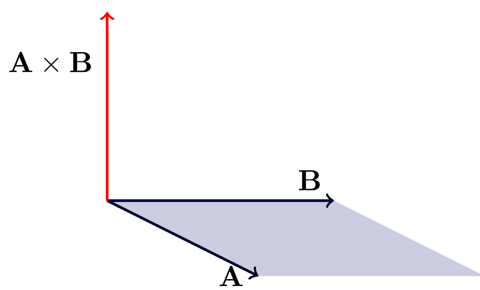


Figura 3: Il prodotto vettore $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

2.1 Proprietà del prodotto vettore

Il prodotto vettore valgono le seguenti proprietà

1. Se uno dei due vettori è nullo il loro prodotto vettore è zero, cioè

$$\text{Se } \mathbf{A} = 0 \text{ oppure } \mathbf{B} = 0 \text{ allora } \mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$$

2. Se uno dei due vettori è multiplo dell'altro allora il loro prodotto vettore è zero

$$\text{Se } \mathbf{B} = k\mathbf{A}, \text{ dove } k \text{ è un numero, allora } \mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$$

3. Il prodotto vettore è anticommutativo, vale infatti il seguente

Teorema 2.2. *Se* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *due vettori qualsiasi dello spazio ordinario si ha*

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \tag{2.2}$$

La dimostrazione segue immediatamente dalla regola della mano destra.

4. Il prodotto vettoriale $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \longmapsto \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ è bilineare, vale cioè il seguente teorema

   Teorema 2.3. *Se* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ *sono tre vettori qualsiasi dello spazio ordinario e* k *è un numero si ha*

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \times \mathbf{C} &= \mathbf{A} \times \mathbf{C} \ + \ \mathbf{B} \times \mathbf{C} \\
\mathbf{A} \times (\mathbf{B}) + \mathbf{C}) &= \mathbf{A} \times \mathbf{B} \ + \ \mathbf{A} \times \mathbf{C} \\
(k\,\mathbf{A}) \times \mathbf{B} &= k\,(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \\
\mathbf{A} \times (k\,\mathbf{B}) &= k\,(\mathbf{A} \times \mathbf{B})
\end{aligned}$$

   Non si riporta la dimostrazione di questo teorema.